# MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT

73. BAND, 4. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 23. MAI 1960)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1960

Math. Z.

LANGE, L. J., and W. J. THRON
Math. Zeitschr. 73, 295–311 (1960)

# A two-parameter family of best twin convergence regions for continued fractions*)

Dedicated to OSKAR PERRON on his 80-th anniversary

By

L. J. LANGE and W. J. THRON

## § 1. Introduction

In this paper we shall study the continued fraction

$$1+\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{1}+\cdots \tag{1.1}$$

whose elements $a_n$ satisfy the conditions

$$\begin{cases} a_{2n-1}=c_{2n-1}^2, & |c_{2n-1}\pm i\,a|\leqq\varrho \\ a_{2n}=c_{2n}^2, & |c_{2n}\pm i(1+a)|\geqq\varrho \end{cases} \tag{1.2}$$

where $a$ is a complex number and $a$ and $\varrho$ satisfy the inequality $|a|<\varrho<|1+a|$. We note that for all and only those values of $a$ satisfying $\mathrm{Re}\,(a)>-\frac{1}{2}$ there exists a $\varrho$ such that the latter inequality is satisfied. It will be shown that the conditions (1.2) are sufficient for the convergence of the continued fraction (1.1) and furthermore that they are best possible conditions.

The first result concerning twin convergence regions was proved by LEIGHTON and WALL [1] in 1936. They showed that $|a_{2n-1}|\leqq\frac{1}{4}$ and $|a_{2n}|\geqq\frac{25}{4}$ guarantee the convergence of (1.1). In 1943 THRON [5] succeeded, with the help of function-theoretic means, in proving that if one restricts the condition $|c_{2n}\pm i(1+a)|\geqq\varrho$ in (1.2) to $|c_{2n}\pm i(1+a)|\geqq\varrho+\varepsilon$, where $\varepsilon$ is an arbitrarily small positive number, the continued fraction converges. However, only the proof for the case $a=0$ with this added restriction was published [6]. THRON also proved in the latter paper that the conditions

$$a_{2n-1}=c_{2n-1}^2,\ |c_{2n-1}|\leqq\varrho;\qquad a_{2n}=c_{2n}^2,\ |c_{2n}\pm i|\geqq\varrho; \tag{1.3}$$

$0<\varrho<1$ are best conditions in the sense that, if convergence could be proved, the domains of definition of $a_{2n-1}$ and $a_{2n}$ in (1.3) would form a set of best twin convergence regions. In 1956 SINGH and THRON [4] were finally able to settle the case $a=0$ by elementary means, *i.e.*, they showed that conditions (1.3) are sufficient for the convergence of (1.1), thereby removing the $\varepsilon$ in the earlier result of the second author.

The main body of this paper is devoted to the case in which the elements of the continued fraction (1.1) satisfy conditions (1.2) for real values of $a$.

*) This research was supported by the United States Air Force under contract no. AF 49(638) - 100 monitored by the AF Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command.

Under these conditions we are able to give an elementary proof for the convergence of (1.1) which, besides being advantageous from the aesthetic point of view, allows us to establish uniformity of convergence and to give a usable estimate of the speed of convergence. By an "elementary proof" we mean an argument that employs only the fundamental concepts of complex variable theory. In some instances, though, we have sacrificed a more basic argument for the sake of brevity. The proof is based on the well known "nested circles" concept and is a modification of a method employed by THRON [8] in a recent paper. In the present case the estimate of $B_{2n-1}/B_{2n-2}$ causes considerably more difficulty.

In § 5 we show that our basic theorem still holds for complex values of $a$. In this case, however, we have only been able to construct a non elementary proof depending on the theory of functions of normal families, and thus, at present, cannot make any statement about the uniformity of the convergence. Nevertheless, we are able to remove the $\varepsilon$ in the result of THRON [5] and thus obtain a set of twin convergence regions which, as we shall prove in § 6, are best twin convergence regions. The proof depends essentially on the results of § 4.

There are several interesting aspects of our results. First of all, for $a \neq 0$, the element region for the $a_{2n-1}$ contains a corner which can be approached without causing divergence. In previous cases corners in convergence regions have led to difficulties. Secondly, our results provide a link between the case $a=0$ and the case in which $(\varrho - |a|)e^{i \arg a}$ remains fixed as $\varrho \to \infty$, which leads to the well known parabolic regions. Finally, our results are the first examples of best twin convergence regions that are not unique.

We now introduce some notation and formulas which will be useful throughout the remainder of this paper. If $f(z)$ is a function of a complex variable and if $W$ is a domain in the plane of complex numbers, then by $f(W)$ we shall mean the set of all $f(z)$ for $z \in W$. If $c$ is any complex number and if $r$ is any non negative real number, then we shall define the sets

$N(c, r)$, $M(c, r)$, $K(c, r)$, $C_1(c, r)$, $C_2(c, r)$, $E_1(c, r)$, $E_2(c, r)$ as follows:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&N(c, r) = \text{the set of all points } z \text{ satisfying the condition } |z - c| \leqq r \\
&M(c, r) = \text{the set of all points } z \text{ satisfying the condition } |z - c| \geqq r \\
&K(c, r) = \text{the set of all points } z \text{ satisfying the condition } |z - c| = r \\
&C_1(c, r) = N(c, r) \cap N(-c, r) \\
&C_2(c, r) = M(c, r) \cap M(-c, r) \\
&E_1(c, r) = [C_1(c, r)]^2 \\
&E_2(c, r) = [C_2(c, r)]^2.
\end{aligned}
\right. \tag{1.4}
$$

Thus, for example, in terms of this notation the elements $a_n$ satisfy the conditions (1.2) if and only if

$$a_{2n-1} \in E_1(i\,a, \varrho), \qquad a_{2n} \in E_2\big(i\,(1+a), \varrho\big),$$

where $a$ is complex and $|a| < \varrho < |1+a|$.

Next let us introduce

$$t_n(z) = 1 + a_n/z \tag{1.5}$$

and

$$T_n(z) = T_{n-1}\left(t_n(z)\right), \quad T_1(z) = t_1(z). \tag{1.6}$$

Then if we denote the numerator and denominator of the $n$-th approximant of the continued fraction (1.1) by $A_n$ and $B_n$, respectively, we can write

$$A_n/B_n = 1 + \frac{a_1}{1} + \cdots + \frac{a_n}{1} = T_n(1) \tag{1.7}$$

and in general

$$T_n(z) = \frac{A_{n-1}(z-1) + A_n}{B_{n-1}(z-1) + B_n}. \tag{1.8}$$

The quantities $A_n$ and $B_n$ satisfy the well known recursion relations (see for example [2, vol. 1, p. 4 and p. 14])

$$\begin{cases} A_0 = 1, \quad A_1 = 1 + a_1; \quad A_n = A_{n-1} + a_n A_{n-2}, \quad n \geqq 2 \\ B_0 = 1, \quad B_1 = 1; \quad B_n = B_{n-1} + a_n B_{n-2}, \quad n \geqq 2 \\ A_{n-1} B_n - A_n B_{n-1} = (-1)^n \prod_{m=1}^{n} a_m. \end{cases} \tag{1.9}$$

## § 2. Three fundamental lemmas

LEMMA 2.1. *If $a$ and $\varrho$ are any real numbers such that $|a| < \varrho < |1+a|$ and if $a_{2n-1} \in E_1(ia, \varrho)$, $z \in M(-d, m) \subset M(-a, \varrho)$, then*

$$t_{2n-1}(z) \in N(b, k)$$

*where*

$$b = 1 + a(\varrho - a)/(m - d)$$

*and*

$$k = \varrho(\varrho - a)/(m - d).$$

*In addition*

$$N(b, k) \subset N(h, \varrho)$$

*where*

$$h = 1 + a.$$

Proof. First we shall verify that $N(b, k) \subset N(h, \varrho)$. This is equivalent to showing that $k \pm b \leqq \varrho \pm h$. We have that

$$\begin{cases} k \pm b = \dfrac{\varrho(\varrho - a) \pm a(\varrho - a)}{m - d} \pm 1 \\ \qquad = \dfrac{(\varrho - a)(\varrho \pm a)}{m - d} \pm 1, \end{cases} \tag{2.1}$$

and since $m - d \geqq \varrho - a$, it follows that

$$k \pm b \leqq \varrho \pm a \pm 1 = \varrho \pm h.$$

The principal task is to show that $\max|b - t_{2n-1}(z)| = k$ if $a_{2n-1} \in E_1(ia, \varrho)$, $z \in M(-d, m)$. If one holds $z$ fixed and considers

$$b - t_{2n-1}(z) = a(\varrho - a)/(m - d) - a_{2n-1}/z$$

as a function of $a_{2n-1}$ alone, then $|a(\varrho-a)/(m-d)-a_{2n-1}/z|$ assumes its largest value for a point $a_{2n-1}$ on the boundary of $E_1(ia,\varrho)$. The boundary of $E_1(ia,\varrho)$ consists of the points $a_{2n-1}=(-|a|i+\varrho e^{i\vartheta})^2$, where $\vartheta$ ranges over the values $\vartheta_0\leqq\vartheta\leqq\pi-\vartheta_0$. The constant $\vartheta_0$ is defined by the equations

$$\sin\vartheta_0=|a|/\varrho,\qquad \cos\vartheta_0=\sqrt{\varrho^2-a^2}/\varrho.$$

Hence

$$|a(\varrho-a)/(m-d)-a_{2n-1}/z|\leqq\max_{\vartheta,\beta}\left|\frac{a(\varrho-a)}{m-d}-\frac{(-|a|i+\varrho e^{i\vartheta})^2}{-d+me^{i\beta}}\right|$$

where $0\leqq\beta\leqq2\pi$. The set of all points $1/(-d+me^{i\beta})$ is the image of the circle $K(-d,m)$ under the transformation $1/z$. Therefore, since $m\neq d$, it is also a circle. Without too much difficulty one can show that this circle is the set $K\left(\frac{d}{m^2-d^2},\frac{m}{m^2-d^2}\right)$. It follows that

$$(2.2)\quad\begin{cases}|a(\varrho-a)/(m-d)-a_{2n-1}/z|\\ \quad\leqq\max\limits_{\vartheta,\beta'}\left|\dfrac{a(\varrho-a)}{m-d}-\dfrac{(-|a|i+\varrho e^{i\vartheta})^2(d+me^{i\beta'})}{m^2-d^2}\right|\\ \quad=\max\limits_{\vartheta,\beta'}\left|\dfrac{a(\varrho-a)(m+d)-(-|a|i+\varrho e^{i\vartheta})^2(d+me^{i\beta'})}{m^2-d^2}\right|\\ \quad\leqq\max\limits_{\vartheta}\dfrac{|a(\varrho-a)(m+d)-d(-|a|i+\varrho e^{i\vartheta})^2|+m|-|a|i+\varrho e^{i\vartheta}|^2}{m^2-d^2}.\end{cases}$$

Now set $x=x(\vartheta)=2(\varrho\sin\vartheta-|a|)$, where $0\leqq x\leqq2(\varrho-|a|)$. Then

$$\begin{aligned}|-|a|i+\varrho e^{i\vartheta}|^2&=a^2-2|a|\varrho\sin\vartheta+\varrho^2\\&=\varrho^2-a^2+2|a|(|a|-\varrho\sin\vartheta)\\&=\varrho^2-a^2-|a|x,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}(-|a|i+\varrho e^{i\vartheta})^2&=-a^2-2|a|i\varrho e^{i\vartheta}+\varrho^2e^{2i\vartheta}\\&=\varrho^2-a^2+2\varrho\sin\vartheta(|a|-\varrho\sin\vartheta)+2i\varrho\cos\vartheta(\varrho\sin\vartheta-|a|)\\&=\varrho^2-a^2+i\varrho xe^{i\vartheta}.\end{aligned}$$

After making these substitutions in terms of $x$ in the right side of inequality (2.2) we obtain

$$(2.3)\quad\begin{cases}|a(\varrho-a)/(m-d)-a_{2n-1}/z|\\ \leqq\max\limits_{\vartheta,x}\dfrac{|a(\varrho-a)(m+d)-d(\varrho^2-a^2+i\varrho xe^{i\vartheta})|+m(\varrho^2-a^2-|a|x)}{m^2-d^2}\\ =\max\limits_{\vartheta,x}\dfrac{|(\varrho-a)(\varrho d-am)+i\varrho dxe^{i\vartheta}|+m(\varrho^2-a^2-|a|x)}{m^2-d^2}\\ =\max\limits_{\vartheta,x}\dfrac{|(\varrho-a)(\varrho d-am)+i(\varrho d-am)xe^{i\vartheta}+iamxe^{i\vartheta}|+m(\varrho^2-a^2-|a|x)}{m^2-d^2}\\ \leqq\max\limits_{\vartheta,x}\dfrac{|(\varrho-a)(\varrho d-am)+i(\varrho d-am)xe^{i\vartheta}|+|a|mx+m(\varrho^2-a^2-|a|x)}{m^2-d^2}\\ =\max\limits_{\vartheta,x}\dfrac{|\varrho d-am||(\varrho-a)+ixe^{i\vartheta}|+m(\varrho^2-a^2)}{m^2-d^2}.\end{cases}$$

By our hypothesis that $M(-d, m) < M(-a, \varrho)$ we have that

$$m \pm d \geqq \varrho \pm a > 0.$$

Hence it follows that

$$\frac{m+d}{m-d} \geqq \frac{\varrho + a}{\varrho - a},$$

which gives

$$(\varrho - a)(m+d) \geqq (\varrho + a)(m-d)$$

$$\varrho(m + d - m + d) - a(m + d + m - d) \geqq 0$$

or

$$\varrho d - a m \geqq 0.$$

Making use of this result in the chain of inequalities (2.3) we get

$$(2.4)\quad |a(\varrho - a)/(m-d) - a_{2n-1}/z| \leqq \max_{\vartheta, x} \frac{(\varrho d - a m)|(\varrho - a) + i x e^{i\vartheta}| + m(\varrho^2 - a^2)}{m^2 - d^2}.$$

The next step is to find $\max D$, where $D = |(\varrho - a) + i x e^{i\vartheta}|$. We have

$$\begin{aligned} D^2 &= |(\varrho - a) + i x e^{i\vartheta}|^2 \\ &= (\varrho - a)^2 - 2x(\varrho - a)\sin\vartheta + x^2 \\ &= (\varrho - a)^2 - 2x(\varrho - a)\frac{(x + 2|a|)}{2\varrho} + x^2 \\ &= (\varrho - a)^2 - 2\frac{|a|}{\varrho} x(\varrho - a) + \frac{a}{\varrho} x^2. \end{aligned}$$

Therefore, if $a = 0$, $D^2 = (\varrho - a)^2$; and if $a \neq 0$

$$D^2 = (\varrho - a)^2 + \frac{a x}{\varrho}\left(x - \frac{2|a|}{a}(\varrho - a)\right).$$

It is easily seen that for $a > 0$ ($a < 0$) $D^2$ increases (decreases) with increasing $x$. Since $0 \leqq x \leqq 2(\varrho - a)$, it follows that $\max D^2 = (\varrho - a)^2$, or equivalently, $\max D = \varrho - a$.

After applying this result to the inequality (2.4) we arrive at

$$\begin{aligned} |a(\varrho - a)/(m-d) - a_{2n-1}/z| &\leqq \frac{(\varrho d - a m)(\varrho - a) + m(\varrho^2 - a^2)}{m^2 - d^2} \\ &= \frac{(\varrho - a)(\varrho d - a m + m\varrho + a m)}{m^2 - d^2} \\ &= \frac{\varrho(\varrho - a)(m + d)}{m^2 - d^2} \\ &= \frac{\varrho(\varrho - a)}{m - d} = k. \end{aligned}$$

Therefore the lemma is true for $z \in K(-d, m)$. However, if $z \in M(-d, m)$, then $z \in K(-d, m')$ for some $m' \geqq m$, and with the aid of formulae (2.1) it follows that

$$k' \pm b' = \frac{(\varrho - a)(\varrho \pm a)}{m' - d} \pm 1 \leqq \frac{(\varrho - a)(\varrho \pm a)}{m - d} \pm 1 = k \pm b,$$

which implies $N(b', k') < N(b, k)$. With this our proof is complete.

LEMMA 2.2. *If $a$ and $\varrho$ are any real numbers such that $|a|<\varrho<|1+a|$ and if $a_{2n}\in E_2(ih,\varrho)$, $z\in N(b,k)\subset N(h,\varrho)$, where $h=1+a$, then*

$$t_{2n}(z)\in M(-d,m),$$

*where*

$$1+d=[b(h^2+\varrho^2)-2k\varrho h]/(b^2-k^2)$$

*and*

$$m=[2\varrho b h-k(h^2+\varrho^2)]/(b^2-k^2).$$

*In addition*

$$M(-d,m)\subset M(-a,\varrho).$$

Proof. It will be convenient to introduce $q=1+d$. Next we prove the following inequality

$$2h\varrho-qk>h^2+\varrho^2-qb\geqq 0. \tag{2.5}$$

By substituting for $q$ its value in terms of $b$, $h$, $k$, and $\varrho$ and multiplying by $b^2-k^2$, we arrive at the following inequality, which is equivalent to the original one since $b^2-k^2>0$,

$$b\left(2\varrho h b-k(h^2+\varrho^2)\right)>k\left(2\varrho h b-k(h^2+\varrho^2)\right)\geqq 0.$$

This inequality holds if

$$2\varrho h b-k(h^2+\varrho^2)>0.$$

To establish this we note that $b\geqq k+h-\varrho$ and $k\leqq\varrho$, so that

$$\begin{aligned}2\varrho h b-k(h^2+\varrho^2)&\geqq 2\varrho h(h-\varrho)-k(h-\varrho)^2\\&\geqq\varrho(h^2-\varrho^2)>0.\end{aligned}$$

We now dispose of the last assertion that $M(-d,m)\subset M(-a,\varrho)$. This relation is valid if $m\pm d\geqq\varrho\pm a$. We have

$$\left\{\begin{aligned}m\pm d&=\frac{2\varrho b h-k(h^2+\varrho^2)\pm b(h^2+\varrho^2)\mp 2k\varrho h}{b^2-k^2}\mp 1\\&=\frac{(\varrho\pm h)^2}{k\pm b}\mp 1\geqq\varrho\pm h\mp 1=\varrho\pm 1\pm a\mp 1=\varrho\pm a,\end{aligned}\right. \tag{2.6}$$

since $b+k<h+\varrho$ and $k-b<\varrho-h<0$.

The main part of the proof of the lemma consists in showing that $\min|d+t_{2n}(z)|=m$ if $a_{2n}\in E_2(ih,\varrho)$, $z\in N(b,k)$. For fixed $z$ and variable $a_{2n}$, $|d+t_{2n}(z)|=|q+a_{2n}/z|$ assumes its smallest value for a point on the boundary of $E_2(ih,\varrho)$ provided that $q+a_{2n}/z\neq 0$ for $a_{2n}$ in the interior of $E_2(ih,\varrho)$.

The latter statement is equivalent to

$$q+\frac{a_{2n}}{b+ke^{i\alpha}}\neq 0$$

or

$$qb+a_{2n}\neq -qke^{i\alpha}.$$

Thus in order to show that $q+a_{2n}/z \neq 0$ it is sufficient to prove that

$$|q\,b + a_{2n}| > q\,k.$$

The boundary of the domain of variation $E_2(ih, \varrho)$ for the $a_{2n}$ consists of the points $(ih+\varrho e^{i\vartheta})^2$, where $\vartheta$ ranges over the values $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$. Here let us introduce

$$r = r(\vartheta) = 2(h + \varrho \sin\vartheta),$$

where $2(h-\varrho) \leqq r \leqq 2(h+\varrho)$. Then

$$\begin{cases} (i\,h + \varrho\, e^{i\vartheta})^2 = -\,h^2 + 2i\,h\,\varrho\, e^{i\vartheta} + \varrho^2 e^{2i\vartheta} \\ \qquad\qquad = \varrho^2 - h^2 - 2\varrho(h + \varrho\sin\vartheta) + 2i\,\varrho\cos\vartheta(h + \varrho\sin\vartheta) \\ \qquad\qquad = \varrho^2 - h^2 + i\,\varrho\, r\, e^{i\vartheta} \end{cases} \tag{2.7}$$

and

$$\begin{cases} |i\,h + \varrho\, e^{i\vartheta}|^2 = h^2 + 2h\varrho\sin\vartheta + \varrho^2 \\ \qquad\qquad = \varrho^2 - h^2 + 2h(h + \varrho\sin\vartheta) \\ \qquad\qquad = \varrho^2 - h^2 + h\,r. \end{cases} \tag{2.8}$$

It follows that any point $a_{2n} \in E_2(ih, \varrho)$ can be expressed in the form $\varrho^2 - h^2 + i\,y\varrho\, r\, e^{i\vartheta}$, where $y \geqq 1$. From this we obtain

$$\begin{aligned} |h^2 + \varrho^2 + a_{2n}| &= |h^2 + \varrho^2 + \varrho^2 - h^2 + i\,y\,\varrho\, r\, e^{i\vartheta}| \\ &= \varrho\,|2\varrho + i\,y\,r\,e^{i\vartheta}| \\ &= \varrho\,|2\varrho\cos\vartheta + i\,(y\,r - 2\varrho\sin\vartheta)| \\ &\geqq \varrho\,|y\,r - 2\varrho\sin\vartheta| \\ &= \varrho\,|(y-1)\,r + 2h| \geqq 2h\varrho. \end{aligned}$$

Hence it is also true that

$$|(a_{2n} + q\,b) + (h^2 + \varrho^2 - q\,b)| \geqq 2h\varrho,$$

from which follows the inequality

$$|a_{2n} + q\,b| \geqq 2h\varrho - |h^2 + \varrho^2 - q\,b|.$$

After employing inequality (2.5) we arrive at

$$|a_{2n} + q\,b| \geqq 2h\varrho - (h^2 + \varrho^2 - q\,b) > 2h\varrho - (2h\varrho - q\,k) = q\,k.$$

Thus in order to find $\min|q + a_{2n}/z|$ it suffices to consider points $a_{2n}$ of the form $(ih+\varrho e^{i\vartheta})^2$.

Since the transformation $w = 1/z$ maps the circle $K(b, k)$ onto the circle

$$K\left(\frac{b}{b^2 - k^2},\ \frac{k}{b^2 - k^2}\right)$$

it follows that

$$\begin{aligned} |q + a_{2n}/z| &= |q + a_{2n}/(b + k\,e^{i\alpha})| \\ &= |q + a_{2n}(b + k\,e^{i\alpha'})/(b^2 - k^2)| \\ &\geqq \frac{|b\,(h^2 + \varrho^2) - k\,2\varrho h + b\,a_{2n}| - k\,|a_{2n}|}{b^2 - k^2}. \end{aligned}$$

After substituting $a_{2n}=(ih+\varrho e^{i\vartheta})^2$ in the right side of the last inequality we obtain

$$
\begin{aligned}
|q+a_{2n}/z| &\geqq \min_{\vartheta} \frac{|b(h^2+\varrho^2)-2k\varrho h+b(ih+\varrho e^{i\vartheta})^2|-k|ih+\varrho e^{i\vartheta}|^2}{b^2-k^2} \\
&= \min_{\vartheta} \frac{|b\varrho^2-2k\varrho h+2i\varrho bhe^{i\vartheta}+b\varrho^2e^{2i\vartheta}|-k|ih+\varrho e^{i\vartheta}|^2}{b^2-k^2} \\
&= \min_{\vartheta} \frac{2\varrho|(\varrho b-hk)\cos\vartheta+ih(b+k\sin\vartheta)|-k(\varrho^2+h^2+2h\varrho\sin\vartheta)}{b^2-k^2} \\
&\geqq \min_{\vartheta} \frac{2\varrho h(b+k\sin\vartheta)-k(\varrho^2+h^2+2h\varrho\sin\vartheta)}{b^2-k^2} \\
&= \frac{2\varrho bh-k(\varrho^2+h^2)}{b^2-k^2}=m.
\end{aligned}
$$

Thus the lemma is proved for $z\in K(b,k)$.

If $z\in N(b,k)$, then $z\in K(b,k')$ for some $k'\leqq k$, and using formula (2.6) we have that

$$m'\pm d'=\frac{(\varrho\pm h)^2}{k'\pm b}\mp 1>\frac{(\varrho\pm h)^2}{k\pm b}\mp 1=m\pm d$$

which implies that $M(-d',m')<M(-d,m)$.

This completes the proof of Lemma 2.2.

LEMMA 2.3. *If $a_{2n-1}\in E_1(ia,\varrho)$, $a_{2n}\in E_2\big(i(1+a),\varrho\big)$, where $a$ and $\varrho$ are any real numbers such that $|a|<\varrho<|1+a|$, and if we set $s_n=B_{2n-1}/B_{2n-2}$, then*

$$s_n\in N(b_n,k_n),$$

*where*

$$
\begin{cases}
b_n=1+a(n-1)/(n+a-\varrho) \\
k_n=\varrho(n-1)/(n+a-\varrho).
\end{cases}
\tag{2.9}
$$

*Proof.* If $N(b,k)<N(h,\varrho)$, where $h=1+a$, then by Lemma 2.2

$$t_{2n}[N(b,k)]<M(-d,m)<M(-a,\varrho),$$

where

$$1+d=\frac{b(h^2+\varrho^2)-2k\varrho h}{b^2-k^2}$$

$$m=\frac{2\varrho bh-k(h^2+\varrho^2)}{b^2-k^2}.$$

Hence by Lemma 2.1.

$$t_{2n+1}\big[t_{2n}[N(b,k)]\big]<t_{2n+1}[M(-d,m)]<N(b',k'),$$

where

$$b'=1+a(\varrho-a)/(m-d)$$

$$k'=\varrho(\varrho-a)/(m-d).$$

By formula (2.6)

$$(m-d)=\frac{(\varrho-h)^2}{k-b}+1,$$

and therefore

$$b' = 1 + \frac{a(\varrho - a)(b - k)}{(b - k) - (h - \varrho)^2}$$

$$k' = \frac{\varrho(\varrho - a)(b - k)}{(b - k) - (h - \varrho)^2}.$$

We now wish to prove that $s_n \in N(b_n, k_n)$ where $b_n$ and $k_n$ are given by formulas (2.9). It follows from the recursion formulas (1.9) that $s_1 = 1$, $s_{n+1} = t_{2n+1}(t_{2n}(s_n))$. Clearly, $s_1 \in N(b_1, k_1) = N(1, 0) < N(h, \varrho)$. Now let us assume that $s_n \in N(b_n, k_n)$, where it is easily seen that $N(b_n, k_n) < N(h, \varrho)$. Then by the above discussion we have that $s_{n+1} \in N(b', k')$ where

$$b' = 1 + \frac{a(\varrho - a)(b_n - k_n)}{(b_n - k_n) - (h - \varrho)^2}$$

$$k' = \frac{\varrho(\varrho - a)(b_n - k_n)}{(b_n - k_n) - (h - \varrho)^2}.$$

After substituting the given values of $b_n$ and $k_n$ in terms of $n$ in the expressions for $b'$ and $k'$ and after some manipulation of terms, we obtain

$$b' = 1 + a[(n + 1) - 1]/[(n + 1) + a - \varrho] = b_{n+1}$$

$$k' = \varrho[(n + 1) - 1]/[(n + 1) + a - \varrho] = k_{n+1}.$$

Therefore,

$$s_{n+1} \in N(b_{n+1}, k_{n+1}),$$

and the lemma is proved by induction.

## § 3. Nested circles

We have from Lemmas 2.1 and 2.2 that

$$t_{2n}[N(1 + a, \varrho)] < M(-a, \varrho)$$

$$t_{2n-1}[M(-a, \varrho)] < N(1 + a, \varrho).$$

By mathematical induction it follows immediately that

$$T_{2n}[N(1 + a, \varrho)] < N(1 + a, \varrho)$$

$$T_{2n-1}[M(-a, \varrho)] < N(1 + a, \varrho).$$

Here let us introduce the notation

$$N_{2n} = T_{2n}[N(1 + a, \varrho)]$$

$$N_{2n-1} = T_{2n-1}[M(-a, \varrho)].$$

Then, since the region $N_n$ is contained in the circular disc $N(1 + a, \varrho)$, it is itself a circular disc. We shall denote the boundary and radius of $N_n$ by $C_n$ and $R_n$, respectively. Since

$$N_{2n} = T_{2n}[N(1 + a, \varrho)] = T_{2n-1}[t_{2n}[N(1 + a, \varrho)]] < T_{2n-1}[M(-a, \varrho)] = N_{2n-1}$$

and

$$N_{2n+1} = T_{2n+1}[M(-a, \varrho)] = T_{2n}[t_{2n-1}[M(-a, \varrho)]] < T_{2n}[N(1 + a, \varrho)] = N_{2n},$$

the circular regions $N_n$ are nested in one another. Now, however, $N_{n+m} \subset N_n$, $m > 0$ and consequently $T_{n+m}(1) \in N_n$ so that we have

$$|T_n(1) - T_{n+m}(1)| \leqq 2R_n.$$

Since the sequence of approximants of the continued fraction (1.1) is the sequence $\{T_n(1)\}$, convergence of (1.1) will be established if it can be shown that $\lim R_n = 0$.

To obtain $R_n$ we use the formula

$$2\pi R_n = l(C_n) = \int_{K_n} |T_n'(z)|\,|dz|,$$

where $K_{2n-1} = K(-a, \varrho)$ and $K_{2n} = K(1+a, \varrho)$. With the aid of formulas (1.9) one readily calculates that

$$|T_n'(z)| = \frac{\left|\prod_{m=1}^{n} a_m\right|}{|B_{n-1}(z-1) + B_n|^2}.$$

By Lemma 2.3 $s_n = B_{2n-1}/B_{2n-2}$ is contained in the interior of $N(1+a, \varrho)$ and therefore $B_n \neq 0$. Hence $|T_n'(z)|$ can be expressed in the form

$$|T_n'(z)| = \frac{\left|\prod_{m=1}^{n} a_m\right|}{|B_{n-1}|^2 |z - 1 + B_n/B_{n-1}|^2}.$$

Now let us write $s_n - (1+a) = g e^{i\gamma}$ and compute $R_{2n-1}$. Since $z = -a + \varrho e^{i\vartheta}$, it follows that

$$\begin{aligned} 2\pi R_{2n-1} &= \left|\frac{\prod_{m=1}^{2n-1} a_m}{B_{2n-2}^2}\right| \int_0^{2\pi} \frac{\varrho\, d\vartheta}{|\varrho e^{i\vartheta} + g e^{i\gamma}|^2} \\ &= \left|\frac{\prod_{m=1}^{2n-1} a_m}{B_{2n-2}^2}\right| \int_0^{2\pi} \frac{\varrho\, d\vartheta}{\varrho^2 + g^2 + 2\varrho g \cos(\vartheta - \gamma)} \\ &= 2\left|\frac{\prod_{m=1}^{2n-1} a_m}{B_{2n-2}^2}\right| \int_0^{\pi} \frac{\varrho\, d\varphi}{\varrho^2 + g^2 + 2\varrho g \cos\varphi} \\ &= 2\pi \left|\frac{\prod_{m=1}^{2n-1} a_m}{B_{2n-2}^2}\right| \frac{\varrho}{|\varrho^2 - g^2|}. \end{aligned}$$

Thus we obtain

$$R_{2n-1} = \frac{\varrho \left|\prod_{m=1}^{2n-1} a_m\right|}{|B_{2n-1}|^2 |\varrho^2 - |1 + a - s_n|^2|}. \tag{3.1}$$

To compute $R_{2n}$ we write $a + B_{2n}/B_{2n-1} = a + t_{2n}(s_n)$ as $\rho e^{i\delta}$ and set $z = 1 + a + \varrho e^{i\vartheta}$.

Then

$$2\pi R_{2n} = \left| \frac{\prod_{m=1}^{2n} a_m}{B_{2n-1}^2} \right| \int_0^{2\pi} \frac{\varrho \, d\vartheta}{|\varrho e^{i\vartheta} + p e^{i\delta}|^2}.$$

In a manner analogous to the one used for $R_{2n-1}$ we arrive at

$$R_{2n} = \frac{\varrho \left| \prod_{m=1}^{2n} a_m \right|}{|B_{2n-1}|^2 |a + t_{2n}(s_n)|^2 - \varrho^2|}. \tag{3.2}$$

From formulas (3.1) and (3.2) it follows that

$$R_{2n}/R_{2n-1} = \frac{|a_{2n}| |\varrho^2 - |1 + a - s_n|^2|}{|s_n|^2 |a + t_{2n}(s_n)|^2 - \varrho^2|}. \tag{3.3}$$

## § 4. Proof of the main theorem

In formula (3.3) certain absolute value signs can be removed. By Lemma 2.3 $s_n \in N(b_n, k_n) \subset N(1+a, \varrho)$, where $b_n$, $k_n$ satisfy formulas (2.9). Consequently, $|1+a-s_n| < \varrho$. Moreover, an application of Lemma 2.2 gives $|a+t_{2n}(s_n)| > \varrho$. Now formula (3.3) can be written as

$$\begin{cases} Q_n = R_{2n}/R_{2n-1} = \dfrac{|a_{2n}| (\varrho^2 - |1 + a - s_n|^2)}{|s_n|^2 (|a + t_{2n}(s_n)|^2 - \varrho^2)} \\ \qquad = \dfrac{|a_{2n}| (\varrho^2 - |h - s_n|^2)}{|h s_n + a_{2n}|^2 - \varrho^2 |s_n|^2}, \end{cases} \tag{4.1}$$

where $h = 1 + a$.

From now on it will be sufficient for our purposes to use a weaker estimate of $s_n$ than the one obtained in Lemma 2.3. That is, we shall set

$$s_n = h + g_n e^{i\gamma_n},$$

where $0 \leqq \gamma_n \leqq 2\pi$ and $g_n$ is a non-negative variable whose domain of definition depends on $n$. More explicitly, $0 \leqq g_n \leqq g_n^*$, where $g_n^*$ for each value of $n$ is determined by the condition that it be the smallest value of, say $r$, such that $N(h, r) > N(b_n, k_n)$. It is easily verified, using the formulas (2.9) for $b_n$ and $k_n$, that

$$g_n^* = |a| + (\varrho - |a|)(n-1)/(n + a - \varrho). \tag{4.2}$$

So after replacing $s_n$ by $h + g_n^{i\gamma_n}$ in formula (4.1) we have

$$Q_n = \frac{|a_{2n}| (\varrho^2 - g_n^2)}{|h(h + g_n e^{i\gamma_n}) + a_{2n}|^2 - \varrho^2 |h + g_n e^{i\gamma_n}|^2}. \tag{4.3}$$

We now want to determine the maximum of $Q_n$ for $a_{2n} \in E_2(ih, \varrho)$. For that purpose we consider the function

$$f(z, w) = \frac{z}{(z + h d_n)^2 + w \varrho^2 d_n^2}$$

where we set $d_n = h + g_n e^{i\gamma_n}$, $z \in E_2(ih, \varrho)$, and $|w| \leqq 1$. Let us denote the boundary of $E_2(ih, \varrho)$ by $P_2(ih, \varrho)$. Then on the one hand a simple argument

will show that

$$\max_{z\in E_1,\,|w|\leq 1}|f(z,w)| = \max_{z\in E_1}\frac{|z|}{|z+h\,d_n|^2-\varrho^2|\,d_n|^2}$$

and on the other hand, according to the Maximum Modulus principle,

$$\begin{aligned}\max_{z\in E_1,\,|w|\leq 1}|f(z,w)| &= \max_{z\in P_1,\,|w|=1}|f(z,w)|\\ &= \max_{z\in P_1}\frac{|z|}{|z+h\,d_n|^2-\varrho^2|\,d_n|^2}.\end{aligned}$$

Thus in order to determine the maximum of $Q_n$ we need take into consideration only those values of $a_{2n}$ which lie in $P_2(ih,\varrho)$, *i.e.*, all points of the form $(ih+\varrho e^{i\vartheta})^2$. Here (as in the proof of Lemma 2.2) we again introduce $r(\vartheta)=2(h+\varrho\sin\vartheta)$, where $2(h-\varrho)\leqq r\leqq 2(h+\varrho)$ and by relations (2.7), (2.8)

$$\begin{aligned}(i\,h+\varrho\,e^{i\vartheta})^2 &= \varrho^2-h^2+i\,\varrho\,r\,e^{i\vartheta}\\ |\,i\,h+\varrho\,e^{i\vartheta}|^2 &= \varrho^2-h^2+r\,h.\end{aligned}$$

After making these substitutions for $a_{2n}$ and $|a_{2n}|$ in (4.3) we have that

$$Q_n\leqq\max_{\vartheta,r,\gamma_n,g_n}\frac{(\varrho^2-h^2+r\,h)(\varrho^2-g_n^2)}{|\varrho^2+h\,g_n e^{i\gamma_n}+i\,\varrho\,r\,e^{i\vartheta}|^2-\varrho^2|\,h+g_n e^{i\gamma_n}|^2}.$$

We set the denominator in this inequality equal to $D_n$ and obtain

$$\begin{aligned}D_n &= (\varrho^2+h\,g_n\cos\gamma_n-\varrho\,r\sin\vartheta)^2+(h\,g_n\sin\gamma_n+\varrho\,r\cos\vartheta)^2-\\ &\quad-\varrho^2(h^2+2h\,g_n\cos\gamma_n+g_n^2)\\ &= (g_n^2-\varrho^2)(h^2-\varrho^2)+\varrho^2r^2-2\varrho^3r\sin\vartheta+2h\,\varrho\,r\,g_n\sin(\gamma_n-\vartheta)\\ &= (g_n^2-\varrho^2)(h^2-\varrho^2)+2\varrho^2h\,r+2h\,\varrho\,r\,g_n\sin(\gamma_n-\vartheta).\end{aligned}$$

Hence for fixed $g_n$, $\vartheta$, and $r$,

$$\begin{aligned}\min_{0\leq\gamma_n\leq 2\pi}D_n &= (g_n^2-\varrho^2)(h^2-\varrho^2)+2\varrho^2h\,r-2h\,\varrho\,r\,g_n\\ &= (g_n^2-\varrho^2)(h^2-\varrho^2)+2\varrho\,h\,r(\varrho-g_n).\end{aligned}$$

It follows that

$$\begin{aligned}Q_n &\leqq \max_{r,g_n}\frac{(\varrho^2-h^2+r\,h)(\varrho^2-g_n^2)}{(g_n^2-\varrho^2)(h^2-\varrho^2)+2\varrho\,h\,r(\varrho-g_n)}\\ &= \max_{r,g_n}\frac{(\varrho^2-h^2+r\,h)(\varrho+g_n)}{(\varrho+g_n)(\varrho^2-h^2)+2\varrho\,h\,r}\\ &= \max_{r,g_n}\frac{(\varrho^2-h^2+r\,h)(\varrho+g_n)}{(\varrho+g_n)(\varrho^2-h^2+r\,h)+r\,h(\varrho-g_n)}\\ &= \max_{r,g_n}\frac{1}{1+\left(\dfrac{r\,h}{\varrho^2-h^2+r\,h}\right)\left(\dfrac{\varrho-g_n}{\varrho+g_n}\right)}\\ &= \max_{r,g_n}\frac{1}{1+\left(1+\dfrac{h^2-\varrho^2}{r\,h+\varrho^2-h^2}\right)\left(\dfrac{\varrho-g_n}{\varrho+g_n}\right)}.\end{aligned}$$

Since $\varrho<h$ and $\varrho>g_n$, the above expression increases with increasing $r$.

Therefore, since $\max r = 2(h+\varrho)$, we have that

$$Q_n \leqq \max_{g_n} \frac{1}{1+\left(\frac{2h(h+\varrho)}{\varrho^2-h^2+2h(h+\varrho)}\right)\left(\frac{\varrho-g_n}{\varrho+g_n}\right)}$$

$$= \max_{g_n} \frac{1}{1+\frac{2h}{h+\varrho}\left(\frac{\varrho-g_n}{\varrho+g_n}\right)}.$$

Now we introduce

$$u_n = \min_{g_n} \frac{\varrho-g_n}{\varrho+g_n}.$$

Then

$$u_n = \frac{\varrho-g_n^*}{\varrho+g_n^*},$$

where by (4.2)

$$g_n^* = |a| + (\varrho - |a|)(n-1)/(n+a-\varrho).$$

After substituting the value of $g_n^*$ in the formula for $u_n$ we obtain

$$u_n = \frac{(\varrho-|a|)(h-\varrho)}{2\varrho(n+a-\varrho)-(\varrho-|a|)(h-\varrho)}. \tag{4.4}$$

It follows that

$$Q_n \leqq \frac{1}{1+\frac{2h}{h+\varrho}u_n}.$$

Since the sequence $\{R_n\}$ is monotone non-increasing, $R_{2n+1}/R_{2n} \leqq 1$ for all $n \geqq 1$, and using formula (3.1) it is easily seen that $R_1 \leqq \varrho$. Therefore

$$R_{2n} \leqq R_1 \prod_{m=1}^{n} R_{2m}/R_{2m-1} \leqq \varrho \prod_{m=1}^{n} Q_m \leqq \frac{\varrho}{\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{2h}{h+\varrho}u_m\right)},$$

where $u_n$ is given by (4.4). A fairly straightforward argument will show that the series $\sum_{m=1}^{\infty} u_m$ diverges; hence that the product $\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{2h}{h+\varrho}u_m\right)$ tends to infinity with increasing $n$. Thus we have in

$$\left\{\varrho \Big/ \prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{2h}{h\varrho}u_m\right)\right\}$$

a sequence which is independent of the choice of the elements $a_n$ of the continued fraction (1.1), which has the limit 0, and whose $n$-th element is greater than or equal to $R_{2n}$. With this result and the results of the first part of § 3 the following theorem is proved:

THEOREM 4.1. *Let $a$ and $\varrho$ be any real numbers such that $|a| < \varrho < |1+a|$, and let the elements of the continued fraction* (1.1) *satisfy the conditions*

$$a_{2n-1} = c_{2n-1}^2, \quad |c_{2n-1} \pm i a| \leqq \varrho$$

$$a_{2n} = c_{2n}^2, \quad |c_{2n} \pm i(i+a)| \geqq \varrho.$$

*Then the continued fraction converges. Its value lies in the circular disc* $|1+a-z|\leqq\varrho$. *If the elements* $a_n$ *are functions of an arbitrary number of variables, then the continued fraction converges uniformly provided only that the domains of the variables be chosen such that the elements* $a_n$ *satisfy the above conditions for all values of the variables.*

## § 5. A non elementary proof for complex $a$

THEOREM 5.1. *The continued fraction* (1.1) *converges if its elements satisfy*

$$a_{2n-1}=c_{2n-1}^2, \quad |c_{2n-1}\pm i\,a|\leqq\varrho$$
$$a_{2n}=c_{2n}^2, \quad |c_{2n}\pm i(1+a)|\geqq\varrho,$$

*where* $a$ *is a complex number and* $a$ *and* $\varrho$ *satisfy the condition* $|a|<\varrho<|1+a|$.

*Proof.* We consider the continued fraction

$$1+\frac{c_1^2(z)}{1}+\frac{c_2^2(z)}{1}+\cdots, \tag{5.1}$$

where

(a) $c_{2n-1}(z)=c_{2n-1}z$

(b) $c_{2n}(z)=c_{2n}$ if $|c_{2n}\pm i(1+a)|\geqq\varrho+\eta$

(c) $c_{2n}(z)=c_{2n}z\pm i(z-1)$ if $|c_{2n}\pm i(1+a)|<\varrho+\eta$.

Here $0<\eta<|1+a|-\varrho$. In part (c) of the definition of $c_n(z)$ the plus or minus sign has to be used depending on the sign for which the second inequality holds (in view of the restriction on $\eta$ it can hold for but one of the signs).

We now observe the following facts:

(d) The approximants $f_n(z)$ of (5.1) are rational functions of $z$.

(e) $c_{2n-1}(z)\in C_1\big(i\,a\,z,\ \varrho|z|\big)$ for all $z\neq 0$.

(f) When $c_{2n}(z)$ satisfies (c)

$$\begin{aligned}|c_{2n}(z)\pm i(1+a\,z)| &= |c_{2n}z\pm i(z-1+1+a\,z)|\\ &= |c_{2n}\pm i(1+a)|\,|z|\geqq\varrho|z|.\end{aligned}$$

From (b), (c), and (f) one deduces that $c_{2n}(z)\in C_2\big(i(1+a)z,\ \varrho|z|\big)$ for all $z$ for which $N\big(i(1+a\,z),\ \varrho|z|\big)<N\big(i(1+a),\ \varrho+\eta\big)$. The open region $D$ for $z$ determined by this last condition contains the line segment $[\delta_1(\eta),\ 1+\delta_2(\eta)]$ on the real line and the circular arc $|z|=\delta_1$, $0\leqq\arg z\leqq-\arg a$. Here $\delta_1$ and $\delta_2$ are certain positive functions of $\eta$. For these values of $z$ the following relation $|a\,z|<\varrho|z|<|1+a\,z|$ will hold. For $z\in D$ one then shows easily (see for example, THRON [5]) that

$$f_n(z)\in N\big(1+a\,z,\ \varrho|z|\big).$$

It follows that for $z\in D$ the sequence $\{f_n(z)\}$ forms a normal family (it is, as a matter of fact, bounded) of holomorphic functions. Denote by $\Delta$ the subset of $D$ for which $\arg z=-\arg a$. In view of the results of the preceding sections the sequence converges for $z\in\Delta$. Now $z=1$ is an interior point of $D$.

An application of the Stieltjes-Vitali Theorem (see THRON [7, p. 142]) then completes the proof of our theorem.

We conclude with the following observation: For both the elementary proof as well as the non elementary proof, as given by us, the basic value region results are needed. These however are easily derived. For the elementary proof we use in addition a much sharper determination depending on $n$ of the location of the $n$-th approximants of the continued fraction. It is this determination which we are as yet unable to make for non real values of the parameter $a$.

## § 6. Bestness

Let us first recall some definitions which will play a role in the arguments which follow. By a *region* we mean an open connected set with all or part of its boundary. Two regions $E_1$, $E_2$ are called *twin convergence regions* for the continued fraction (1.1) if $a_{2n-1} \in E_1$, $a_{2n} \in E_2$ insure the convergence of (1.1). Twin convergence regions $E_1$, $E_2$ are said to be *best* if there do not exist twin convergence regions $E_1^*$, $E_2^*$ such that $E_1^* \supset E_1$, $E_2^* \supset E_2$, where at least one of the equalities $E_1^* = E_1$, $E_2^* = E_2$ fails to hold.

Simpler arguments concerning the bestness of results are obtained if we consider the numbers $c_n$ of the continued fraction

$$1 + \frac{c_1^2}{1} + \frac{c_2^2}{1} + \cdots \tag{6.1}$$

in place of the elements $a_n$ of the continued fraction (1.1). The numbers $c_n$ will be called the elements of (6.1). Furthermore, the concepts of "twin convergence regions" and "bestness" are defined in a manner analogous to that given for the continued fraction (1.1), the place of the $a_n$ being taken by the $c_n$.

Now let

$$c_{2n-1} \in C_1(i\,a, \varrho), \qquad c_{2n} \in C_2\big(i(1+a), \varrho\big),$$

where $a = |a|\, e^{i\alpha}$ is complex and $|a| < \varrho < |1+a|$. Then by Theorems 4.1 and 5.1 the regions $C_1(i\,a, \varrho)$, $C_2\big(i(1+a), \varrho\big)$ are twin convergence regions for the continued fraction (6.1). We have to prove that they are best possible regions. The method of proof involves the use of necessary conditions, derived from a consideration of periodic continued fractions of periods 2 and 4, for two regions to be twin convergence regions for (6.1).

It is known that the continued fraction (6.1) of period $2k$ diverges if the transformation

$$T_{2k}(w) = \frac{A_{2k-1}(w-1) + A_{2k}}{B_{2k-1}(w-1) + B_{2k}} \tag{6.2}$$

is elliptic [3]. Let us set

$$F_{2k} = \frac{A_{2k-1} + c_{2k}^2 B_{2k-2}}{\prod_{m=1}^{2k} c_m}. \tag{6.3}$$

Then without too much difficulty it can be shown that (6.2) is elliptic if and only if

$$\operatorname{Im}(F_{2k}) = 0, \qquad |\operatorname{Re}(F_{2k})| < 2. \tag{6.4}$$

First let us suppose that there exists a region $C_1^* > C_1(ia, \varrho)$ such that $C_1^*$, $C_2\big(i(1+a), \varrho\big)$ are twin convergence regions for (6.1). If we set

$$c_{2n-1} = z \in C_1^*, \quad c_{2n} = c \in C_2\big(i(1+a), \varrho\big),$$

we have that

$$A_1 = 1 + z^2, \quad B_0 = 1,$$

whence by formula (6.3) that

$$F_2 = \frac{1 + z^2 + c^2}{c\,z}.$$

Therefore, using (6.4), the continued fraction under consideration diverges if $z$ is a point on one of the two arcs defined by

$$\operatorname{Im}\Big(\frac{1 + z^2 + c^2}{c\,z}\Big) = 0, \quad \Big|\operatorname{Re}\Big(\frac{1 + z^2 + c^2}{c\,z}\Big)\Big| < 2.$$

The end points of these two arcs are

$$c - i, \quad c + i, \quad -c + i, \quad -c - i,$$

which, in particular, cannot be interior points of $C_1^*$. Since

$$\big[C_2\big(i(1+a), \varrho\big) + i\big] \cap \big[C_2\big(i(1+a), \varrho\big) - i\big]$$

includes the boundary of $C_1(ia, \varrho)$, it follows that $C_1^* = C_1(ia, \varrho)$. If this were not the case, $C_1^*$ would not be connected and therefore not a region, which is contrary to our assumptions.

Next let us suppose that there exists a region $C_2^* > C_2\big(i(1+a), \varrho\big)$ such that $C_1(ia, \varrho)$, $C_2^*$ are twin convergence regions for (6.1). In this case we set

$$c_{4n-3} = c_{4n-1} = \sqrt{\varrho^2 - |a|^2}\, e^{i\alpha} \in C_1(ia, \varrho)$$
$$c_{4n-2} = c \in C_2\big(i(1+a), \varrho\big), \quad c_{4n} = z \in C_2^*$$

then

$$A_3 = \big(1 + (\varrho^2 - |a|^2)\, e^{2i\alpha}\big)^2 + c^2, \quad B_2 = 1 + c^2,$$

and formula (6.3) becomes

$$F_4 = \frac{(1 + (\varrho^2 - |a|^2)\, e^{2i\alpha})^2 + c^2 + (1 + c^2)\, z^2}{c\, z\, (\varrho^2 - |a|^2)\, e^{2i\alpha}}.$$

Hence, if we consider this value of $F_4 = F_4(z)$ as a function of $z$, the continued fraction diverges if $z$ is any point of the two arcs defined by

$$\operatorname{Im}\big(F_4(z)\big) = 0, \quad |\operatorname{Re}\big(F_4(z)\big)| < 2.$$

A simple computation will show that these arcs have the end points

$$\pm\Big(\pm i + \frac{(\varrho^2 - |a|^2)\, e^{2i\alpha}}{c \mp i}\Big).$$

That these points cannot be interior points of $C_2^*$ is easily seen. Since

$$i + (\varrho^2 - |a|^2)\, e^{2i\alpha} / \big[K\big(i(1+a), \varrho\big) - i\big] = K\big(i(1+a), \varrho\big)$$

and

$$-i + (\varrho^2 - |a|^2)\, e^{2i\alpha} / \big[K\big(-i(1+a), \varrho\big) + i\big] = K\big(-i(1+a), \varrho\big),$$

it follows that no point $z$, where $z$ is an element of the boundary $K\left(i(1+a), \varrho\right) \cup K\left(-i(1+a), \varrho\right)$ of $C_2\left(i(1+a), \varrho\right)$, can be an interior point of $C_2^*$. Hence, by the requirement that $C_2^*$ be a region, it follows that $C_2^* = C_2\left(i(1+a), \varrho\right)$. This completes the proof that $C_1(ia, \varrho)$, $C_2\left(i(1+a), \varrho\right)$ are best twin convergence regions for the continued fraction (6.1).

With the aid of the above discussion and the two theorems proved in this paper we can now give examples showing that best twin convergence regions may not be unique. By this we mean that for the same region $C_1$ there may exist two different regions $C_2$ and $C_2'$ such that both $C_1$, $C_2$ and $C_1$, $C_2'$ are best twin convergence regions for (6.1).

For all values of $a$ such that

$$-\tfrac{1}{2} < \operatorname{Re}(a) < \tfrac{1}{2} \tag{6.5}$$

there always exists a $\varrho$ such that the two conditions

$$|a| < \varrho < |1+a|, \quad |-a| < \varrho < |1-a| \tag{6.6}$$

are satisfied simultaneously. Hence if we let

$$c_{2n-1} \in C_1(ia, \varrho), \quad c_{2n} \in C_2\left(i(1+a), \varrho\right) \quad \text{or} \quad c_{2n} \in C_2\left(i(1-a), \varrho\right),$$

where $a$ and $\varrho$ satisfy (6.5) and (6.6), it follows that both $C_1(ia, \varrho)$, $C_2\left(i(1+a), \varrho\right)$ and $C_1(ia, \varrho)$, $C_2\left(i(1-a), \varrho\right)$ are best twin convergence regions for (6.1).

## Bibliography

[1] Leighton, Walter, and H. S. Wall: On the transformation and convergence of continued fractions. Amer. J. Math. **58**, 267–281 (1936). — [2] Perron, Oskar: Die Lehre von den Kettenbrüchen, 3. Aufl., Stuttgart, Bd. 1, 1954 und Bd. 2, 1957. — [3] Schwerdtfeger, H.: Moebius transformations and continued fractions. Bull. Amer. Math. Soc. **52**, 307–309 (1946). — [4] Singh, Vikramaditya, and W. J. Thron: A family of best twin convergence regions for continued fractions. Proc. Amer. Math. Soc. **7**, 277–282 (1956). — [5] Thron, W. J.: Convergence regions for continued fractions. Dissertation, The Rice Institute, 1943. — [6] Thron, W. J.: Two families of twin convergence regions for continued fractions. Duke Math. J. **10**, 677–685 (1943). — [7] Thron, W. J.: Introduction to the theory of functions of a complex variable. New York 1953. — [8] Thron, W. J.: Zwillingskonvergenzgebiete für Kettenbrüche $1 + K(a_n/1)$, deren eines die Kreisscheibe $|a_{2n-1}| \leqq \varrho^2$ ist. Math. Z. **70**, 310–344 (1959).

*Dept. of Math., University of Colorado, Boulder, Col. (U.S.A.)*

*(Eingegangen am 6. Oktober 1959)*

SPECHT, W.
Math. Zeitschr. 73, 312–329 (1960)

# Die Charaktere der symmetrischen Gruppe

Herrn OSKAR PERRON zum 80. Geburtstag am 7. Mai 1960

Von

WILHELM SPECHT

In der *symmetrischen Gruppe* $\mathfrak{S}_m$ aller Permutationen der endlichen Ziffernmenge $M=(1, 2, \ldots, m)$ läßt sich bekanntlich [1]) jede Ähnlichkeitsklasse durch ihren *Typus*

$$(z) = (z_1, z_2, \ldots, z_m)$$

charakterisieren, der eine eindeutig festgelegte nichtnegativ-ganzzahlige Lösung der Gleichung

$$z_1 + 2z_2 + \cdots + m z_m = m$$

darstellt, so daß jede Ähnlichkeitsklasse der Gruppe $\mathfrak{S}_m$ mit ihrem Typus $(z)$ bezeichnet werden kann.

Analog wird jede *absolutirreduzible Darstellung* der Gruppe $\mathfrak{S}_m$ und damit jeder *einfache Charakter* durch die ihm umkehrbar-eindeutig zugeordnete *Partition*

$$(\lambda): \quad m = \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_k \quad \text{mit} \quad \lambda_0 \geqq \lambda_1 \geqq \cdots \geqq \lambda_k > 0$$

des Grades $m$ gekennzeichnet. Der durch die Partition $(\lambda)$ bestimmte einfache Charakter $\chi^{(\lambda)}$ der Gruppe $\mathfrak{S}_m$ ist eine *Klassenfunktion in* $\mathfrak{S}_m$, die jeder Ähnlichkeitsklasse $(z)$ in $\mathfrak{S}_m$ einen rational ganzzahligen Wert

$$\chi^{(\lambda)}(z) = \chi^{(\lambda)}(z_1, z_2, \ldots, z_m)$$

zuordnet. Nach G. FROBENIUS [2]) bezeichnet man die Zahl

$$m_0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = m - \lambda_0$$

als die *Dimension* des Charakters $\chi^{(\lambda)}(z)$.

Es liegt nun die Frage nahe nach einem ganzwertigen Polynom

$$\varphi^{(\lambda)}(z) = \varphi^{(\lambda)}(z_1, z_2, \ldots, z_m)$$

in $m$ Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots, z_m$ mit rationalen [durch die Partition $(\lambda)$ bestimmten] Koeffizienten, das für die den Typen $(z)$ der Ähnlichkeitsklassen in $\mathfrak{S}_m$ entsprechenden Stellen die Werte

$$\varphi^{(\lambda)}(z) = \chi^{(\lambda)}(z) = \chi^{(\lambda)}(z_1, z_2, \ldots, z_m)$$

---

[1]) Vgl. etwa W. SPECHT: Gruppentheorie, insbesondere Abschnitt 1.2.8. Berlin: Springer 1956.

[2]) Vgl. G. FROBENIUS: Über die Charaktere der mehrfach transitiven Gruppen. Sitzber. Akad. Berlin **1904**, 558–571.

des Charakters $\chi^{(\lambda)}$ der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_m$ annimmt. Da bisher nur ein rekursives Verfahren zur Bestimmung der Polynome $\varphi^{(\lambda)}(z)$ bekannt ist[3]), mag die Angabe eines independenten Kalküls zum gleichen Zwecke nicht ohne Interesse sein. Mit dieser Aufgabe beschäftigt sich die vorliegende Arbeit.

## 1.

Jede Permutation $P$ der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_m$ vom Grade $m$ besitzt eine (im wesentlichen eindeutig festlegbare) *Normaldarstellung*

$$P = C_1 C_2 \dots C_s = (\nu_{11}, \nu_{12}, \dots, \nu_{1k_1})(\nu_{21}, \nu_{22}, \dots, \nu_{2k_2}) \dots (\nu_{s1}, \nu_{s2}, \dots, \nu_{sk_s})$$

in paarweise vertauschbaren, ziffernfremden zyklischen Permutationen

$$C_\sigma = (\nu_{\sigma 1}, \nu_{\sigma 2}, \dots, \nu_{\sigma k_\sigma}) \quad \text{für} \quad 1 \leqq \sigma \leqq s$$

bezüglicher Länge $k_\sigma$ mit der Summe

$$m = k_1 + k_2 + \dots + k_s$$

in der Anzahl

$$s = z_1 + z_2 + \dots + z_m,$$

wenn noch $z_\mu$ (für $1 \leqq \mu \leqq m$) die Anzahl der Zykeln $C_\sigma$ von der Länge $\mu$ bezeichnet. Es ist dann

$$\tau(P) = (z) = (z_1, z_2, \dots, z_m) \quad \text{mit} \quad z_1 + 2z_2 + \dots + m z_m = m$$

der *Typus der Permutation* $P \in \mathfrak{S}_m$, und es gilt der Satz:

*Permutationen $P, Q \in \mathfrak{S}_m$ sind genau dann (in $\mathfrak{S}_m$) ähnlich, wenn sie den gleichen Typus $\tau(P) = \tau(Q)$ besitzen.*

Aus diesem Grunde läßt sich jede Ähnlichkeitsklasse der Gruppe $\mathfrak{S}_m$ durch den Typus $(z)$ der ihr angehörenden Permutationen kennzeichnen. Umgekehrt existiert zu jeder Lösung $(z)$ der Gleichung

$$z_1 + 2z_2 + \dots + m z_m = m$$

in nichtnegativen ganzen Zahlen (wenigstens) eine Permutation $P \in \mathfrak{S}_m$, die den Typus $\tau(P) = (z)$ besitzt. Der bequemeren Darstellung wegen werden wir nun den Typus $(z)$ einer Ähnlichkeitsklasse in $\mathfrak{S}_m$ zu einer unendlichen Zahlenfolge

$$\mathfrak{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots)$$

in nichtnegativen ganzen Zahlen $z_n$ ergänzen, die eine Lösung der Gleichung

$$\sum_1^\infty n z_n = m$$

[3]) Für alle darstellungstheoretischen Dinge vgl. H. Boerner: Darstellungen von Gruppen mit Berücksichtigung der Bedürfnisse der modernen Physik, insbes. Kap. 4 und Kap. 6. Berlin: Springer 1955. — Für die Formel von A. Gamba vgl. A. Gamba, Sui caratteri delle rappresentazioni del gruppo simmetrico. Atti Accad. Lincei Rend. (VIII) **12**, 167—169 (1952).

darstellt. Offensichtlich ist $\mathfrak{z}$ ein finiter Vektor, in dem alle Komponenten $z_n$ mit einem Index $n > m$ verschwinden.

Demgemäß bezeichne weiterhin $\mathfrak{V}^+$ die Menge aller finiten Vektoren

$$\mathfrak{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}, \ldots)$$

in nichtnegativen ganzen Komponenten $z_n$, von denen jeweils nur endlich viele von Null verschieden sind. Die Menge $\mathfrak{V}^+$ ist unter Verwendung der üblichen Vektoraddition eine (additive, kommutative) *Halbgruppe* mit dem *neutralen* Element $\mathfrak{o} = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Für jedes Paar von Vektoren

$$\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots); \qquad \mathfrak{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$$

der Menge $\mathfrak{V}^+$ und jedes Paar nichtnegativer ganzer Zahlen $g$, $h$ gehört auch der Vektor

$$\mathfrak{z} = g\,\mathfrak{x} + h\,\mathfrak{y} = (g\,x_1 + h\,y_1, g\,x_2 + h\,y_2, \ldots, g\,x_n + h\,y_n, \ldots)$$

zur Menge $\mathfrak{V}^+$. In der Halbgruppe $\mathfrak{V}^+$ läßt sich überdies eine *Ordnungsrelation* erklären:

$$\mathfrak{x} \leqq \mathfrak{y}, \quad \textit{wenn} \quad x_n \leqq y_n \quad \textit{für} \quad 1 \leqq n < \infty$$

mit den gewohnten Eigenschaften einer (teilweisen) Ordnung. Insbesondere besteht für jeden Vektor $\mathfrak{z} \in \mathfrak{V}^+$ die Ungleichung

$$\mathfrak{o} \leqq \mathfrak{z}.$$

Erfüllen ferner die Vektoren

$$\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots); \qquad \mathfrak{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$$

der Halbgruppe $\mathfrak{V}^+$ die Ungleichung $\mathfrak{x} \leqq \mathfrak{y}$, so gehört auch die Differenz

$$\mathfrak{y} - \mathfrak{x} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n, \ldots)$$

der Halbgruppe $\mathfrak{V}^+$ an.

Dem Zweck dieser Untersuchung entsprechend führen wir ferner in der Halbgruppe $\mathfrak{V}^+$ eine *Norm* $||\mathfrak{z}||$ ein durch die Festsetzung

$$||\mathfrak{z}|| = \sum_1^\infty n\,z_n \qquad \text{für jeden Vektor } \mathfrak{z} \in \mathfrak{V}^+.$$

Man stellt leicht folgende Tatsachen fest:

1. *Es gilt* $||\mathfrak{z}|| = 0$ *genau dann, wenn* $\mathfrak{z} = \mathfrak{o}$.

2. *Für jedes Paar von Vektoren* $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathfrak{V}^+$ *und jedes Paar nichtnegativer ganzer Zahlen* $g$, $h$ *besteht die Gleichung*

$$||g\,\mathfrak{x} + h\,\mathfrak{y}|| = g\,||\mathfrak{x}|| + h\,||\mathfrak{y}||.$$

3. *Die Vektoren* $\mathfrak{z} \in \mathfrak{V}^+$ *gleicher Norm* $||\mathfrak{z}|| = m \geqq 1$ *entsprechen umkehrbar-eindeutig den Typen*

$$\mathfrak{z} = (z) = (z_1, z_2, \ldots, z_m, 0, 0, \ldots)$$

*der Ähnlichkeitsklassen in der symmetrischen Gruppe* $\mathfrak{S}_m$ *vom Grade* $m$.

Über der Halbgruppe $\mathfrak{P}^+$ erklären wir den *Raum* $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}(\mathfrak{P}^+)$ *der ganzwertigen Funktionen* $\varphi(\mathfrak{z})$ in folgender Weise:

Für eine reelle Veränderliche $z$ und eine beliebige ganze Zahl $a \geqq 0$ stellt der Binomialkoeffizient

$$\binom{z}{0}=1 \quad \text{bzw.} \quad \binom{z}{a}=\frac{z(z-1)\dots(z-a+1)}{a!} \quad \text{für } a>0$$

bekanntlich ein ganzwertiges Polynom dar. Wir können daher für jeden (finiten) Vektor $\mathfrak{a} \in \mathfrak{P}^+$ über der Halbgruppe $\mathfrak{P}^+$ eine ganzwertige Funktion erklären durch die Festsetzung

$$\binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{a}}=\prod_1^\infty \binom{z_n}{a_n}=\binom{z_{\nu_1} z_{\nu_2}\dots z_{\nu_k}}{a_{\nu_1} a_{\nu_2}\dots a_{\nu_k}}=\binom{z_{\nu_1}}{a_{\nu_1}}\binom{z_{\nu_2}}{a_{\nu_2}}\cdots\binom{z_{\nu_k}}{a_{\nu_k}},$$

wenn im Vektor $\mathfrak{a} \in \mathfrak{P}^+$ genau die den Indizes $0<\nu_1<\nu_2<\cdots<\nu_k<\infty$ entsprechenden Komponenten von Null verschieden sind.

Als Raum $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}(\mathfrak{P}^+)$ der ganzwertigen Funktionen über der Halbgruppe $\mathfrak{P}^+$ bezeichnen wir dann die Menge aller (formal unendlichen) Reihen

$$\varphi(\mathfrak{z})=\sum_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{P}^+}\alpha(\mathfrak{a})\binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{a}}$$

mit beliebigen ganzzahligen Koeffizienten $\alpha(\mathfrak{a})$, wobei die Summation über die gesamte Halbgruppe $\mathfrak{P}^+$ vorzunehmen ist. In der Tat stellt dieser Ausdruck $\varphi(\mathfrak{z})$ eine ganzwertige Funktion über $\mathfrak{P}^+$ dar, da der Funktionswert $\varphi(\mathfrak{z})$ an einer Stelle $\mathfrak{z} \in \mathfrak{P}^+$ als endliche Summe

$$\varphi(\mathfrak{z})=\sum_{\mathfrak{a}\leq\mathfrak{z}}\alpha(\mathfrak{a})\binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{a}}$$

erhalten wird. Übrigens ist die Darstellung einer ganzwertigen Funktion $\varphi(\mathfrak{z}) \in \mathfrak{G}(\mathfrak{P}^+)$ als formalunendliche Reihe eindeutig, weil die Gleichung

$$\varphi(\mathfrak{z})=\sum_{\mathfrak{a}}\alpha(\mathfrak{a})\binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{a}}=0 \quad \text{für jeden Vektor } \mathfrak{z}\in\mathfrak{P}^+$$

die Gleichung

$$\alpha(\mathfrak{a})=0 \quad \text{für jeden Vektor } \mathfrak{a}\in\mathfrak{P}^+$$

nach sich zieht.

Insbesondere bezeichnen wir als *primitive* ganzwertige Funktion vom Grade $k$ über der Halbgruppe $\mathfrak{P}^+$ für jede ganze Zahl $k \geqq 0$ die Summe

$$\pi_k(\mathfrak{z})=\sum_{|\mathfrak{a}|=k}\binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{a}}.$$

Die primitiven ganzwertigen Funktionen kleineren Grades $0 \leqq k \leqq 10$ sind im Anhang dieser Arbeit angegeben.

SATZ 1. *Der Raum $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}(\mathfrak{B}^+)$ der ganzwertigen Funktionen $\varphi(\mathfrak{z})$ über der Halbgruppe $\mathfrak{B}^+$ ist ein kommutativer assoziativer Ring unter den folgenden Festsetzungen:*

*Jedem geordneten Paar ganzwertiger Funktionen*

$$\varphi(\mathfrak{z})=\sum_{\mathfrak{a}}\alpha(\mathfrak{a})\binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{a}};\qquad \psi(\mathfrak{z})=\sum_{\mathfrak{a}}\beta(\mathfrak{a})\binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{a}} \tag{1.1}$$

*sei die Summe*

$$\varphi(\mathfrak{z})+\psi(\mathfrak{z})=\sum_{\mathfrak{a}}\left(\alpha(\mathfrak{a})+\beta(\mathfrak{a})\right)\binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{a}} \tag{1.3}$$

*und das Produkt*

$$\varphi(\mathfrak{z})*\psi(\mathfrak{z})=\sum_{\mathfrak{c}}\gamma(\mathfrak{c})\binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{c}} \tag{1.2}$$

*mit den Koeffizienten*

$$\gamma(\mathfrak{c})=\sum_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{c}}\alpha(\mathfrak{a})\,\beta(\mathfrak{b})\binom{\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}}=\sum_{\mathfrak{a}\leq\mathfrak{c}}\alpha(\mathfrak{a})\,\beta(\mathfrak{c}-\mathfrak{a})\binom{\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}}=\sum_{\mathfrak{b}\leq\mathfrak{c}}\alpha(\mathfrak{c}-\mathfrak{b})\,\beta(\mathfrak{b})\binom{\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}} \tag{1.4}$$

*zugeordnet.*

BEWEIS. Hinsichtlich der (in der gewohnten Weise erklärten) Addition ist der Funktionenraum $\mathfrak{G}(\mathfrak{B}^+)$ offensichtlich eine abelsche Gruppe. Die Multiplikation genügt (aus Symmetriegründen) dem kommutativen Gesetz

$$\varphi(\mathfrak{z})*\psi(\mathfrak{z})=\psi(\mathfrak{z})*\varphi(\mathfrak{z}).$$

Jedes Tripel ganzwertiger Funktionen

$$\varphi(\mathfrak{z})=\sum_{\mathfrak{a}}\alpha(\mathfrak{a})\binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{a}};\qquad \psi(\mathfrak{z})=\sum_{\mathfrak{b}}\beta(\mathfrak{b})\binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{b}};\qquad \chi(\mathfrak{z})=\sum_{\mathfrak{c}}\gamma(\mathfrak{c})\binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{c}}$$

genügt wegen

$$\varphi(\mathfrak{z})*\psi(\mathfrak{z})=\sum_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}}\alpha(\mathfrak{a})\,\beta(\mathfrak{b})\binom{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$$

und

$$\left(\varphi(\mathfrak{z})*\psi(\mathfrak{z})\right)*\chi(\mathfrak{z})=\sum_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b},\,\mathfrak{c}}\alpha(\mathfrak{a})\,\beta(\mathfrak{b})\,\gamma(\mathfrak{c})\binom{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\binom{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}\binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}},$$

sowie wegen

$$\psi(\mathfrak{z})*\chi(\mathfrak{z})=\sum_{\mathfrak{b},\,\mathfrak{c}}\beta(\mathfrak{b})\,\gamma(\mathfrak{c})\binom{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}}\binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}$$

und

$$\varphi(\mathfrak{z})*\left(\psi(\mathfrak{z})*\chi(\mathfrak{z})\right)=\sum_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b},\,\mathfrak{c}}\alpha(\mathfrak{a})\,\beta(\mathfrak{b})\,\gamma(\mathfrak{c})\binom{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}}\binom{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}}\binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}$$

auf Grund der Gleichung

$$\binom{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\binom{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}=\prod_{1}^{\infty}\frac{(a_n+b_n+c_n)!}{a_n!\,b_n!\,c_n!}=\binom{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}}\binom{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}}$$

dem assoziativen Gesetz

$$\left(\varphi(\mathfrak{z})*\psi(\mathfrak{z})\right)*\chi(\mathfrak{z})=\varphi(\mathfrak{z})*\left(\psi(\mathfrak{z})*\chi(\mathfrak{z})\right).$$

Auch das distributive Gesetz

$$(\varphi(\mathfrak{z}) + \psi(\mathfrak{z})) * \chi(\mathfrak{z}) = \varphi(\mathfrak{z}) * \chi(\mathfrak{z}) + \psi(\mathfrak{z}) * \chi(\mathfrak{z})$$

ist leicht als gültig nachzuweisen. Schließlich ist die primitive Funktion

$$\pi_0(\mathfrak{z}) = \sum_{\mathfrak{a}} \delta(\mathfrak{a}) \binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{a}} = 1 \quad \text{mit} \quad \delta(\mathfrak{a}) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mathfrak{a} = \mathfrak{o}, \\ 0, & \text{wenn } \mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}, \end{cases}$$

die Einheit des Ringes $\mathfrak{G}(\mathfrak{Z}^+)$, da für jede ganzwertige Funktion $\varphi(\mathfrak{z}) \in \mathfrak{G}(\mathfrak{Z}^+)$ die Gleichung

$$\pi_0(\mathfrak{z}) * \varphi(\mathfrak{z}) = \varphi(\mathfrak{z})$$

besteht.

Bemerkung. Der hier eingeführte Ringkalkül im Funktionenraum $\mathfrak{G}(\mathfrak{Z}^+)$ kann, da die Addition in der gewohnten Weise erklärt ist, auf die Kompositionsregel

$$\binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{a}} * \binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{b}} = \binom{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} \binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} = \binom{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}} \binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}},$$

d.h.

$$\prod_1^\infty \binom{z_n}{a_n} * \prod_1^\infty \binom{z_n}{b_n} = \prod_1^\infty \frac{(a_n+b_n)!}{a_n!\,b_n!} \prod_1^\infty \binom{z}{a_n+b_n},$$

also auf die leicht zu handhabende Kompositionsregel

$$\binom{z}{a} * \binom{z}{b} = \binom{a+b}{a} \binom{z}{a+b}$$

für Binomialkoeffizienten zurückgeführt werden.

Im kommutativen assoziativen Ring $\mathfrak{G}(\mathfrak{Z}^+)$ läßt sich nun auch in der üblichen Weise die $k$-reihige Determinante

$$\det{}^* |\varphi_{\varkappa\lambda}(\mathfrak{z})| = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(\mathfrak{z}) & \varphi_{12}(\mathfrak{z}) & \cdots & \varphi_{1k}(\mathfrak{z}) \\ \varphi_{21}(\mathfrak{z}) & \varphi_{22}(\mathfrak{z}) & \cdots & \varphi_{2k}(\mathfrak{z}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{k1}(\mathfrak{z}) & \varphi_{k2}(\mathfrak{z}) & \cdots & \varphi_{kk}(\mathfrak{z}) \end{vmatrix}^*$$

aus beliebigen $k^2$ ganzwertigen Funktionen $\varphi_{\varkappa\lambda}(\mathfrak{z}) \in \mathfrak{G}(\mathfrak{Z}^+)$ erklären.

## 2.

Unter den Festsetzungen und Bezeichnungen des vorangehenden Abschnittes gilt nun der folgende

Satz 2. *Für eine beliebige Serie natürlicher Zahlen*

$$\lambda_0 \geqq \lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_k > 0$$

*von der Länge* $k \geqq 0$ *mit den Summen*

$$m = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k; \qquad m_0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$$

*bilde man im Funktionenraum $\mathfrak{G}(\mathfrak{V}^+)$ die (vom ersten Parameter $\lambda_0$ unabhängige) $(k+1)$-zeilige Determinante*

$$(2)\quad \left\{ \varphi^{(\lambda)}(\mathfrak{z}) = \varphi^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k)}(\mathfrak{z}) \right.$$
$$\left. = \begin{vmatrix} \pi_0(\mathfrak{z}) & \pi_0(\mathfrak{z}) & \pi_0(\mathfrak{z}) & \cdots & \pi_0(\mathfrak{z}) & \pi_0(\mathfrak{z}) \\ \pi_{\lambda_1-1}(\mathfrak{z}) & \pi_{\lambda_1}(\mathfrak{z}) & \pi_{\lambda_1+1}(\mathfrak{z}) & \cdots & \pi_{\lambda_1+k-2}(\mathfrak{z}) & \pi_{\lambda_1+k-1}(\mathfrak{z}) \\ \pi_{\lambda_2-2}(\mathfrak{z}) & \pi_{\lambda_2-1}(\mathfrak{z}) & \pi_{\lambda_2}(\mathfrak{z}) & \cdots & \pi_{\lambda_2+k-3}(\mathfrak{z}) & \pi_{\lambda_2+k-2}(\mathfrak{z}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \pi_{\lambda_k-k}(\mathfrak{z}) & \pi_{\lambda_k-k+1}(\mathfrak{z}) & \pi_{\lambda_k-k+2}(\mathfrak{z}) & \cdots & \pi_{\lambda_k-1}(\mathfrak{z}) & \pi_{\lambda_k}(\mathfrak{z}) \end{vmatrix}^*$$

*aus den (primitiven) ganzwertigen Funktionen*

$$\pi_n(\mathfrak{z}) = \sum_{\|\mathfrak{a}\|=n} \binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{a}} \quad \textit{für} \quad 0 \leqq n < \infty,$$

$$\pi_n(\mathfrak{z}) = 0 \qquad \textit{für} \quad n < 0.$$

***Dann genügt die ganzwertige Funktion $\varphi^{(\lambda)}(\mathfrak{z})$ für die Partition***

$$(\lambda):\quad m = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k \quad \textit{mit} \quad \lambda_0 \geqq \lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_k > 0$$

*des Grades $m$ der Gleichung*

$$\varphi^{(\lambda)}(\mathfrak{z}) = \chi^{(\lambda)}(z_1, z_2, \ldots, z_m) \quad \textit{für} \quad \|\mathfrak{z}\| = \sum_1^\infty n\, z_n = m.$$

BEMERKUNG. Die durch die Partition

$$(\lambda)_0:\quad m_0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k \quad \text{mit} \quad \lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_k > 0$$

bestimmte ganzwertige Funktion $\varphi^{(\lambda)}(\mathfrak{z}) \in \mathfrak{G}(\mathfrak{V}^+)$ liefert somit für jeden Grad

$$m = \lambda_0 + m_0 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k \quad \text{mit} \quad \lambda_0 \geqq \lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_k > 0$$

den dieser Partition $(\lambda)$ entsprechenden einfachen Charakter $\chi^{(\lambda)}$ von der Dimension $m_0$. Wir bezeichnen daher $m_0$ auch als die *Dimension* und die Partition $(\lambda)_0$ der Zahl $m_0$ als die *Partition der ganzwertigen Funktion* $\varphi^{(\lambda)}(\mathfrak{z})$.

Zum Beweise dieses Satzes erinnern wir zunächst an die Bildung der einfachen Charaktere der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_m$ aus ihren *Schurschen Charakteristiken* oder *S-Funktionen*. Aus reellen Veränderlichen $s_1, s_2, \ldots, s_m$ bilde man für jede ganze Zahl $k \geqq 0$ die Funktion

$$p_k(s) = \sum_{(z)} \frac{1}{z_1!\, z_2! \ldots z_k!} \left(\frac{s_1}{1}\right)^{z_1} \left(\frac{s_2}{2}\right)^{z_2} \cdots \left(\frac{s_k}{k}\right)^{z_k},$$

worin die Summe über alle nichtnegativ-ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$z_1 + 2z_2 + \cdots + k\, z_k = k$$

zu nehmen ist; ferner setze man

$$p_k(s) = 0 \quad \text{für} \quad k < 0$$

Nehmen wir zur Vereinfachung der Darstellung eine abzählbar unendliche Menge

$$(s) = (s_1, s_2, \ldots, s_n, s_{n+1}, \ldots)$$

reeller Veränderlicher zu Hilfe und bilden wir aus ihnen für jeden (finiten) Vektor $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}^+$ das (nur formal unendliche) Produkt

$$S(\mathfrak{z}) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z_n!} \left(\frac{s_n}{n}\right)^{z_n},$$

so kann der Funktion $p_k(s)$ in der hier eingeführten Schreibweise auch die einfachere Gestalt

$$p_k(s) = \sum_{||\mathfrak{z}||=k} S(\mathfrak{z}) \quad \text{für} \quad 0 \leqq k < \infty; \qquad p_k(s) = 0 \quad \text{für} \quad k < 0$$

gegeben werden. Teilt man jeder Veränderlichen $s_n$ die *Dimension* (das *Gewicht*) $n$ zu, so ist die Funktion $p_k(s)$ *isobar* vom Gewicht

$$k = \sum_{1}^{\infty} n z_n = ||\mathfrak{z}|| \quad \text{für} \quad 0 \leqq k < \infty.$$

Für eine beliebige Partition

$$(\lambda): \quad m = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k \quad \text{mit} \quad \lambda_0 \geqq \lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_k > 0$$

des Grades $m$ liefert dann die $(k+1)$-zeilige isobare Determinante vom Grade $m$:

$$(3.1) \qquad D^{(\lambda)}(s) = \begin{vmatrix} p_{\lambda_0}(s) & p_{\lambda_0+1}(s) & p_{\lambda_0+2}(s) & \cdots & p_{\lambda_0+k}(s) \\ p_{\lambda_1-1}(s) & p_{\lambda_1}(s) & p_{\lambda_1+1}(s) & \cdots & p_{\lambda_1+k-1}(s) \\ p_{\lambda_2-2}(s) & p_{\lambda_2-1}(s) & p_{\lambda_2}(s) & \cdots & p_{\lambda_2+k-2}(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{\lambda_k-k}(s) & p_{\lambda_k-k+1}(s) & p_{\lambda_k-k+2}(s) & \cdots & p_{\lambda_k}(s) \end{vmatrix}$$

in ihrer Entwicklung

$$(3.2) \qquad \begin{cases} D^{(\lambda)}(s) = \displaystyle\sum_{(z)} \frac{\chi^{(\lambda)}(z_1, z_2, \ldots, z_m)}{z_1!\, z_2! \ldots z_m!} \left(\frac{s_1}{1}\right)^{z_1} \left(\frac{s_2}{2}\right)^{z_2} \cdots \left(\frac{s_m}{m}\right)^{z_m} \\ \qquad\qquad = \displaystyle\sum_{||\mathfrak{z}||=m} \chi^{(\lambda)}(z_1, z_2, \ldots, z_m)\, S(\mathfrak{z}), \end{cases}$$

den dieser Partition zugeordneten einfachen Charakter $\chi^{(\lambda)}$ der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_m$.

Entwickelt man die Determinante $D^{(\lambda)}(s)$ nach der ersten Zeile:

$$(4) \qquad D^{(\lambda)}(s) = p_{\lambda_0}(s)\, P_0(s) + p_{\lambda_0+1}(s)\, P_1(s) + \cdots + p_{\lambda_0+k}(s)\, P_k(s),$$

so ist das Polynom $P_k(s)$ isobar vom Gewicht

$$m - \lambda_0 - \varkappa = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k - \varkappa = m_0 - \varkappa \quad \text{für} \quad 0 \leqq \varkappa \leqq k.$$

Um nun die Verbindung zum Satze 2 herzustellen, bilden wir wie zuvor aus der Veränderlichenfolge $(s)$ für jeden Vektor $\mathfrak{a}\in\mathfrak{V}^+$ das Potenzprodukt

$$S(\mathfrak{a})=\prod_1^\infty \frac{1}{a_n!}\left(\frac{s_n}{n}\right)^{a_n}$$

vom Gewicht

$$\sum_1^\infty n\,a_n=\|\mathfrak{a}\|$$

und ordnen jeder ganzwertigen Funktion

$$\varphi(\mathfrak{z})=\sum_{\mathfrak{a}}\alpha(\mathfrak{a})\binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{a}}$$

des Ringes $\mathfrak{G}(\mathfrak{V}^+)$ die rationalzahlige Funktion

$$C(\varphi;s)=\sum_{\mathfrak{a}}\alpha(\mathfrak{a})\,S(\mathfrak{a}) \tag{5}$$

als *Charakteristik* zu Man findet dann leicht die folgenden Korrespondenzen:

1. *Es gilt* $C(\varphi;s)\equiv 0$ *genau dann, wenn* $\varphi(\mathfrak{z})\equiv 0$.

2. *Für jedes Paar ganzwertiger Funktionen* $\varphi(\mathfrak{z})$, $\psi(\mathfrak{z})\in\mathfrak{G}(\mathfrak{V}^+)$ *bestehen die Gleichungen*

$$C(\varphi+\psi;s)=C(\varphi;s)+C(\psi;s), \tag{6.1}$$

$$C(\varphi*\psi;s)=C(\varphi;s)\,C(\psi;s). \tag{6.2}$$

3. *Die primitiven ganzwertigen Funktionen*

$$\pi_k(\mathfrak{z})=\sum_{\|\mathfrak{a}\|=k}\binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{a}}\quad\text{für}\quad 0\leqq k<\infty$$

*besitzen die Charakteristiken*

$$C(\pi_k;s)=\sum_{\|\mathfrak{a}\|=k}S(\mathfrak{a})=p_k(s). \tag{6.3}$$

Aus diesem Grunde bilden die Charakteristiken $C(\varphi;s)$ der ganzwertigen Funktionen $\varphi(\mathfrak{z})\in\mathfrak{G}(\mathfrak{V}^+)$ unter der gewohnten Addition und Multiplikation für Potenzreihen [in den Veränderlichen $(s)$] einen zum Funktionenring $\mathfrak{G}(\mathfrak{V}^+)$ isomorphen Potenzreihenring.

Nur die Gl. (6.2) bedarf eines Beweises: Für ganzwertige Funktionen

$$\varphi(\mathfrak{z})=\sum_{\mathfrak{a}}\alpha(\mathfrak{a})\binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{a}};\qquad \psi(\mathfrak{z})=\sum_{\mathfrak{b}}\beta(\mathfrak{b})\binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{b}}$$

erhalten wir die Charakteristiken

$$C(\varphi;s)=\sum_{\mathfrak{a}}\alpha(\mathfrak{a})\,S(\mathfrak{a});\qquad C(\psi;s)=\sum_{\mathfrak{b}}\beta(\mathfrak{b})\,S(\mathfrak{b})$$

und deren Produkt

$$C(\varphi;s)\,C(\psi;s)=\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\alpha(\mathfrak{a})\,\beta(\mathfrak{b})\,S(\mathfrak{a})\,S(\mathfrak{b}).$$

Da für jedes Vektorenpaar $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{B}^+$ die Gleichung

$$\begin{aligned} S(\mathfrak{a})\,S(\mathfrak{b}) &= \prod_1^\infty \frac{1}{a_n!}\left(\frac{s_n}{n}\right)^{a_n} \prod_1^\infty \frac{1}{b_n!}\left(\frac{s_n}{n}\right)^{b_n} \\ &= \prod_1^\infty \frac{(a_n+b_n)!}{a_n!\,b_n!} \prod_1^\infty \frac{1}{(a_n+b_n)!}\left(\frac{s_n}{n}\right)^{a_n+b_n} \\ &= \binom{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} S(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \end{aligned}$$

besteht, folgt weiter

$$\begin{aligned} C(\varphi; s)\,C(\psi; s) &= \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \alpha(\mathfrak{a})\,\beta(\mathfrak{b}) \binom{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} S(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \\ &= C(\varphi * \psi; s) \end{aligned}$$

wegen

$$\varphi(\mathfrak{z}) * \psi(\mathfrak{z}) = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \alpha(\mathfrak{a})\,\beta(\mathfrak{b}) \binom{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} \binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}.$$

Die im Satze 2 angegebene Determinante $\varphi^{(\lambda)}(\mathfrak{z})$ des Funktionenringes $\mathfrak{G}(\mathfrak{B}^+)$ besitzt also die Charakteristik

$$C(\varphi^{(\lambda)}; s) = \begin{vmatrix} p_0(s) & p_0(s) & p_0(s) & \cdots & p_0(s) \\ p_{\lambda_1-1}(s) & p_{\lambda_1}(s) & p_{\lambda_1+1}(s) & \cdots & p_{\lambda_1+k-1}(s) \\ p_{\lambda_2-2}(s) & p_{\lambda_2-1}(s) & p_{\lambda_2}(s) & \cdots & p_{\lambda_2+k-2}(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{\lambda_k-k}(s) & p_{\lambda_k-k+1}(s) & p_{\lambda_k-k+2}(s) & \cdots & p_{\lambda_k}(s) \end{vmatrix},$$

die auf Grund der Gl. (4) wegen $p_0(s) \equiv 1$ auch in der Gestalt

$$C(\varphi^{(\lambda)}; s) = P_0(s) + P_1(s) + \cdots + P_k(s)$$

geschrieben werden kann. Setzen wir also

$$\varphi^{(\lambda)}(\mathfrak{z}) = \sum_{\mathfrak{a}} \alpha(\mathfrak{a}) \binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{a}} \quad \text{und} \quad C(\varphi^{(\lambda)}; s) = \sum_{\mathfrak{a}} \alpha(\mathfrak{a})\,S(\mathfrak{a}),$$

sowie

$$P_\varkappa(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \alpha_\varkappa(\mathfrak{a})\,S(\mathfrak{a}) \quad \text{für} \quad 0 \leqq \varkappa \leqq k,$$

so besteht die Gleichung

$$\alpha(\mathfrak{a}) = \sum_{\varkappa=0}^{k} \alpha_\varkappa(\mathfrak{a}) \quad \text{für jeden Vektor } \mathfrak{a} \in \mathfrak{B}^+.$$

Nun ist, wie wir gesehen haben, das Polynom $P_\varkappa(s)$ isobar vom Gewichte

$$m_0 - \varkappa = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\varkappa - \varkappa = m - \lambda_0 - \varkappa,$$

so daß wir genauer erhalten

$$P_\varkappa(s) = \sum_{\|\mathfrak{a}\| = m_0 - \varkappa} \alpha_\varkappa(\mathfrak{a})\,S(\mathfrak{a}).$$

Bilden wir nun unter Verwendung der Partition

$$(\lambda): \quad m = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\varkappa \quad \text{mit} \quad \lambda_0 \geqq \lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_\varkappa > 0$$

für jeden Index $0 \leqq \varkappa \leqq k$ das Produkt

$$\begin{aligned} p_{\lambda_0+\varkappa}(s)\, P_\varkappa(s) &= \sum_{||\mathfrak{b}||=\lambda_0+\varkappa} S(\mathfrak{b}) \sum_{||\mathfrak{a}||=m_0-\varkappa} \alpha_\varkappa(\mathfrak{a})\, S(\mathfrak{a}) \\ &= \sum_{||\mathfrak{a}+\mathfrak{b}||=m} \alpha_\varkappa(\mathfrak{a}) \binom{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} S(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \\ &= \sum_{||\mathfrak{z}||=m} \left( \sum_{\mathfrak{a}} \alpha_\varkappa(\mathfrak{a}) \binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{a}} \right) S(\mathfrak{z}), \end{aligned}$$

so entsteht durch Summation einerseits

$$\begin{aligned} D^{(\lambda)}(s) &= \sum_0^k p_{\lambda_0+\varkappa}(s)\, P_\varkappa(s) \\ &= \sum_{||\mathfrak{z}||=m} \chi^{(\lambda)}(z_1, z_2, \ldots, z_m)\, S(\mathfrak{z}), \end{aligned}$$

andererseits

$$\begin{aligned} D^{(\lambda)}(s) &= \sum_0^k \sum_{||\mathfrak{z}||=m} \left( \sum_{\mathfrak{a}} \alpha_\varkappa(\mathfrak{a}) \binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{a}} \right) S(\mathfrak{z}) \\ &= \sum_{||\mathfrak{z}||=m} \sum_{\mathfrak{a}} \left( \sum_0^k \alpha_\varkappa(\mathfrak{a}) \right) \binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{a}} S(\mathfrak{z}) \\ &= \sum_{||\mathfrak{z}||=m} \left( \sum_{\mathfrak{a}} \alpha(\mathfrak{a}) \binom{\mathfrak{z}}{\mathfrak{a}} \right) S(\mathfrak{z}) \\ &= \sum_{||\mathfrak{z}||=m} \varphi^{(\lambda)}(\mathfrak{z})\, S(\mathfrak{z}). \end{aligned}$$

Mithin besteht die Gleichung

$$\varphi^{(\lambda)}(\mathfrak{z}) = \chi^{(\lambda)}(z_1, z_2, \ldots, z_m) \quad \text{für} \quad ||\mathfrak{z}|| = m,$$

wie zu zeigen war.

### 3.

Um die Brauchbarkeit der im Satze 2 enthaltenen Methode zur Berechnung der einfachen Charaktere der symmetrischen Gruppe zu beleuchten, wollen wir alle Charaktere kleiner Dimension $0 \leqq m_0 \leqq 6$ bestimmen. Die hierfür benötigten primitiven ganzwertigen Funktionen $\pi_k = \pi_k(\mathfrak{z})$ können dem Anhang der Arbeit entnommen werden; dort ist auch eine Tabelle für die erforderlichen *-Produkte primitiver ganzwertiger Funktionen zusammengestellt.

Auf Grund des Satzes 2 genügt es, die ganzwertigen Funktionen $\varphi^{(\lambda)}(\mathfrak{z})$ der Dimension $0 \leqq m_0 \leqq 6$ zu berechnen und anzugeben, für welche Grade $m \geqq m_0$ sie einfache Charaktere ergeben. Zur Vereinfachung der Schreibung setze ich

$$\varphi^{(\lambda)}(\mathfrak{z}) = \varphi^{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)} = \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$$

und ziehe überdies gleiche Summanden $\lambda$ zu Potenzen zusammen.

**Dimension $m_0 = 0$.**

$$\varphi(0) = 1 \qquad (m \geqq 1).$$

**Dimension $m_0 = 1$.**

$$\varphi(1) = \binom{z_1}{1} - 1 \qquad (m \geqq 2).$$

**Dimension $m_0 = 2$.**

$$\varphi(2) = \binom{z_1}{2} + \binom{z_2}{1} - \binom{z_1}{1} \qquad (m \geqq 4).$$

$$\varphi(1^2) = \binom{z_1}{2} - \binom{z_2}{1} - \binom{z_1}{1} + 1 \qquad (m \geqq 3).$$

**Dimension $m_0 = 3$.**

$$\varphi(3) = \binom{z_1}{3} + \binom{z_1 z_2}{1\ 1} + \binom{z_3}{1} - \binom{z_1}{2} - \binom{z_2}{1} \qquad (m \geqq 6).$$

$$\varphi(2\,1) = 2\binom{z_1}{3} - \binom{z_3}{1} - 2\binom{z_1}{2} + \binom{z_1}{1} \qquad (m \geqq 5).$$

$$\varphi(1^3) = \binom{z_1}{3} - \binom{z_1 z_2}{1\ 1} + \binom{z_3}{1} - \binom{z_1}{2} + \binom{z_2}{1} + \binom{z_1}{1} - 1 \qquad (m \geqq 4).$$

**Dimension $m_0 = 4$.**

$$\varphi(4) = \binom{z_1}{4} + \binom{z_1 z_2}{2\ 1} + \binom{z_2}{2} + \binom{z_1 z_3}{1\ 1} + \binom{z_4}{1} - \binom{z_1}{3} - \binom{z_1 z_2}{1\ 1} - \binom{z_3}{1} \qquad (m \geqq 8).$$

$$\varphi(3\,1) = 3\binom{z_1}{4} + \binom{z_1 z_2}{2\ 1} - \binom{z_2}{2} - \binom{z_4}{1} - 3\binom{z_1}{3} - \binom{z_1 z_2}{1\ 1} + \binom{z_1}{2} + \binom{z_2}{1} \qquad (m \geqq 7).$$

$$\varphi(2^2) = 2\binom{z_1}{4} + 2\binom{z_2}{2} - \binom{z_1 z_3}{1\ 1} - 2\binom{z_1}{3} + \binom{z_3}{1} + \binom{z_1}{2} - \binom{z_2}{1} \qquad (m \geqq 6).$$

$$\varphi(2\,1^2) = 3\binom{z_1}{4} - \binom{z_1 z_2}{2\ 1} - \binom{z_2}{2} + \binom{z_4}{1} - 3\binom{z_1}{3} + \binom{z_1 z_2}{1\ 1} + 2\binom{z_1}{2} - \binom{z_1}{1} \qquad (m \geqq 6).$$

$$\varphi(1^4) = \binom{z_1}{4} - \binom{z_1 z_2}{2\ 1} + \binom{z_2}{2} + \binom{z_1 z_3}{1\ 1} - \binom{z_4}{1} - \binom{z_1}{3} + \binom{z_1 z_2}{1\ 1} - \binom{z_3}{1} + \binom{z_1}{2} - \binom{z_2}{1} - \binom{z_1}{1} + 1 \qquad (m \geqq 5).$$

**Dimension $m_0 = 5$.**

$$\varphi(5) = \binom{z_1}{5} + \binom{z_1 z_2}{3\ 1} + \binom{z_1 z_2}{1\ 2} + \binom{z_1 z_3}{2\ 1} + \binom{z_2 z_3}{1\ 1} + \binom{z_1 z_4}{1\ 1} + \binom{z_5}{1} - \binom{z_1}{4} - \binom{z_1 z_2}{2\ 1} - \binom{z_2}{2} - \binom{z_1 z_3}{1\ 1} - \binom{z_4}{1} \qquad (m \geqq 10).$$

$$\varphi(4\,1) = 4\binom{z_1}{5} + 2\binom{z_1 z_2}{3\ 1} + \binom{z_1 z_3}{2\ 1} - \binom{z_2 z_3}{1\ 1} - \binom{z_5}{1} - 4\binom{z_1}{4} - 2\binom{z_1 z_2}{2\ 1} - \binom{z_1 z_3}{1\ 1} + \binom{z_1}{3} + \binom{z_1 z_2}{1\ 1} + \binom{z_3}{1} \qquad (m \geqq 9).$$

$$\varphi(3\,2) = 5\binom{z_1}{5} + \binom{z_1 z_2}{3\,1} + \binom{z_1 z_2}{1\,2} - \binom{z_1 z_3}{2\,1} + \binom{z_2 z_3}{1\,1} - \binom{z_1 z_4}{1\,1} -$$
$$- 5\binom{z_1}{4} - \binom{z_1 z_2}{2\,1} - \binom{z_2}{2} + \binom{z_1 z_3}{1\,1} + \binom{z_4}{1} + 2\binom{z_1}{3} - \binom{z_3}{1} \qquad (m \geqq 8).$$

$$\varphi(3\,1^2) = 6\binom{z_1}{5} - 2\binom{z_1 z_2}{1\,2} + \binom{z_5}{1} - 6\binom{z_1}{4} + 2\binom{z_2}{2} +$$
$$+ 3\binom{z_1}{3} + \binom{z_1 z_2}{1\,1} - \binom{z_1}{2} - \binom{z_2}{1} \qquad (m \geqq 8).$$

$$\varphi(2^2\,1) = 5\binom{z_1}{5} - \binom{z_1 z_2}{3\,1} + \binom{z_1 z_2}{1\,2} - \binom{z_1 z_3}{2\,1} - \binom{z_2 z_3}{1\,1} + \binom{z_1 z_4}{1\,1} -$$
$$- 5\binom{z_1}{4} + \binom{z_1 z_2}{2\,1} - \binom{z_2}{2} + \binom{z_1 z_3}{1\,1} - \binom{z_4}{1} +$$
$$+ 3\binom{z_1}{3} - \binom{z_1 z_2}{1\,1} - \binom{z_1}{2} + \binom{z_2}{1} \qquad (m \geqq 7).$$

$$\varphi(2\,1^3) = 4\binom{z_1}{5} - 2\binom{z_1 z_2}{3\,1} + \binom{z_1 z_3}{2\,1} + \binom{z_2 z_3}{1\,1} - \binom{z_5}{1} -$$
$$- 4\binom{z_1}{4} + 2\binom{z_1 z_2}{2\,1} - \binom{z_1 z_3}{1\,1} + 3\binom{z_1}{3} - \binom{z_1 z_2}{1\,1} - 2\binom{z_1}{2} + \binom{z_1}{1} \qquad (m \geqq 7).$$

$$\varphi(1^5) = \binom{z_1}{5} - \binom{z_1 z_2}{3\,1} + \binom{z_1 z_2}{1\,2} + \binom{z_1 z_3}{2\,1} - \binom{z_2 z_3}{1\,1} - \binom{z_1 z_4}{1\,1} + \binom{z_5}{1} -$$
$$- \binom{z_1}{4} + \binom{z_1 z_2}{2\,1} - \binom{z_2}{2} - \binom{z_1 z_3}{1\,1} + \binom{z_4}{1} +$$
$$+ \binom{z_1}{3} - \binom{z_1 z_2}{1\,1} + \binom{z_3}{1} - \binom{z_1}{2} + \binom{z_2}{1} + \binom{z_1}{1} - 1 \qquad (m \geqq 6).$$

**Dimension $m_0 = 6$.**

$$\varphi(6) = \binom{z_1}{6} + \binom{z_1 z_2}{4\,1} + \binom{z_1 z_2}{2\,2} + \binom{z_2}{3} + \binom{z_1 z_3}{3\,1} + \binom{z_1 z_2 z_3}{1\,1\,1} +$$
$$+ \binom{z_1 z_4}{2\,1} + \binom{z_2 z_4}{1\,1} + \binom{z_1 z_5}{1\,1} + \binom{z_6}{1} - \binom{z_1}{5} - \binom{z_1 z_2}{3\,1} - \binom{z_1 z_2}{1\,2} -$$
$$- \binom{z_1 z_3}{2\,1} - \binom{z_2 z_3}{1\,1} - \binom{z_1 z_4}{1\,1} - \binom{z_5}{1} \qquad (m \geqq 12).$$

$$\varphi(5\,1) = 5\binom{z_1}{6} + 3\binom{z_1 z_2}{4\,1} + \binom{z_1 z_2}{2\,2} - \binom{z_2}{3} + 2\binom{z_1 z_3}{3\,1} - \binom{z_3}{2} + \binom{z_1 z_4}{2\,1} -$$
$$- \binom{z_1 z_4}{2\,1} - \binom{z_6}{1} - 5\binom{z_1}{5} - 3\binom{z_1 z_2}{3\,1} - \binom{z_1 z_2}{1\,2} - 2\binom{z_1 z_3}{2\,1} -$$
$$- \binom{z_1 z_4}{1\,1} + \binom{z_1}{4} + \binom{z_1 z_2}{2\,1} + \binom{z_2}{2} + \binom{z_1 z_3}{1\,1} + \binom{z_4}{1} \qquad (m \geqq 11).$$

$$\varphi(4\,2) = 9\binom{z_1}{6} + 3\binom{z_1 z_2}{4\,1} + \binom{z_1 z_2}{2\,2} + 3\binom{z_2}{3} - \binom{z_1 z_4}{2\,1} + \binom{z_2 z_4}{1\,1} - \binom{z_1 z_5}{1\,1} -$$
$$- 9\binom{z_1}{5} - 3\binom{z_1 z_2}{3\,1} - \binom{z_1 z_2}{1\,2} + \binom{z_1 z_4}{1\,1} + \binom{z_5}{1} +$$
$$+ 3\binom{z_1}{4} + \binom{z_1 z_2}{2\,1} - \binom{z_2}{2} - \binom{z_4}{1} \qquad (m \geqq 10).$$

$$\varphi(4\,1^2) = 10\binom{z_1}{6} + 2\binom{z_1 z_2}{4\;1} - 2\binom{z_1 z_2}{2\;2} - 2\binom{z_3}{3} + \binom{z_1 z_3}{3\;1} - \binom{z_1 z_2 z_3}{1\;1\;1} +$$
$$+ \binom{z_3}{2} + \binom{z_6}{1} - 10\binom{z_1}{5} - 2\binom{z_1 z_2}{3\;1} + 2\binom{z_1 z_2}{1\;2} - \binom{z_1 z_3}{2\;1} +$$
$$+ \binom{z_2 z_3}{1\;1} + 4\binom{z_1}{4} + 2\binom{z_1 z_2}{2\;1} + \binom{z_1 z_3}{1\;1} - \binom{z_1}{3} - \binom{z_1 z_2}{1\;1} - \binom{z_3}{1} \quad (m \geqq 10).$$

$$\varphi(3^2) = 5\binom{z_1}{6} + \binom{z_1 z_2}{4\;1} + \binom{z_1 z_2}{2\;2} - 3\binom{z_2}{3} - \binom{z_1 z_3}{3\;1} + \binom{z_1 z_2 z_3}{1\;1\;1} +$$
$$+ 2\binom{z_3}{2} - \binom{z_1 z_4}{2\;1} - \binom{z_2 z_4}{1\;1} - 5\binom{z_1}{5} - \binom{z_1 z_2}{3\;1} - \binom{z_1 z_2}{1\;2} +$$
$$+ \binom{z_1 z_3}{2\;1} - \binom{z_2 z_3}{1\;1} + \binom{z_1 z_4}{1\;1} + 2\binom{z_1}{4} + 2\binom{z_2}{2} - \binom{z_1 z_3}{1\;1} \quad (m \geqq 9).$$

$$\varphi(3\,2\,1) = 16\binom{z_1}{6} - 2\binom{z_1 z_3}{3\;1} - 2\binom{z_3}{2} + \binom{z_1 z_5}{1\;1} - 16\binom{z_1}{5} +$$
$$+ 2\binom{z_1 z_3}{2\;1} - \binom{z_5}{1} + 8\binom{z_1}{4} - \binom{z_1 z_3}{1\;1} - 2\binom{z_1}{3} + \binom{z_3}{1} \quad (m \geqq 9).$$

$$\varphi(3\,1^3) = 10\binom{z_1}{6} - 2\binom{z_1 z_2}{4\;1} - 2\binom{z_1 z_2}{2\;2} + 2\binom{z_2}{3} + \binom{z_1 z_3}{3\;1} + \binom{z_1 z_2 z_3}{1\;1\;1} +$$
$$+ \binom{z_3}{2} - \binom{z_6}{1} - 10\binom{z_1}{5} + 2\binom{z_1 z_2}{3\;1} + 2\binom{z_1 z_2}{1\;2} - \binom{z_1 z_3}{2\;1} -$$
$$- \binom{z_2 z_3}{1\;1} + 6\binom{z_1}{4} - 2\binom{z_2}{2} - 3\binom{z_1}{3} - \binom{z_1 z_2}{1\;1} + \binom{z_1}{2} + \binom{z_2}{1} \quad (m \geqq 9).$$

$$\varphi(2^3) = 5\binom{z_1}{6} - \binom{z_1 z_2}{4\;1} + \binom{z_1 z_2}{2\;2} + 3\binom{z_2}{3} - \binom{z_1 z_3}{3\;1} - \binom{z_1 z_2 z_3}{1\;1\;1} + 2\binom{z_3}{2} +$$
$$+ \binom{z_1 z_4}{2\;1} - \binom{z_2 z_4}{1\;1} - 5\binom{z_1}{5} + \binom{z_1 z_2}{3\;1} - \binom{z_1 z_2}{1\;2} + \binom{z_1 z_3}{2\;1} + \binom{z_2 z_3}{1\;1} -$$
$$- \binom{z_1 z_4}{1\;1} + 3\binom{z_1}{4} - \binom{z_1 z_2}{2\;1} - \binom{z_2}{2} + \binom{z_4}{1} - \binom{z_1}{3} + \binom{z_1 z_2}{1\;1} - \binom{z_3}{1} \quad (m \geqq 8).$$

$$\varphi(2^2\,1^2) = 9\binom{z_1}{6} - 3\binom{z_1 z_2}{4\;1} + \binom{z_1 z_2}{2\;2} - 3\binom{z_2}{3} + \binom{z_1 z_4}{2\;1} + \binom{z_2 z_4}{1\;1} - \binom{z_1 z_5}{1\;1} -$$
$$- 9\binom{z_1}{5} + 3\binom{z_1 z_2}{3\;1} - \binom{z_1 z_2}{1\;2} - \binom{z_1 z_4}{1\;1} + \binom{z_5}{1} + 6\binom{z_1}{4} -$$
$$- 2\binom{z_1 z_2}{2\;1} + 2\binom{z_2}{2} - 3\binom{z_1}{3} + \binom{z_1 z_2}{1\;1} + \binom{z_1}{2} - \binom{z_2}{1} \quad (m \geqq 8).$$

$$\varphi(2\,1^4) = 5\binom{z_1}{6} - 3\binom{z_1 z_2}{4\;1} + \binom{z_1 z_2}{2\;2} + \binom{z_2}{3} + 2\binom{z_1 z_3}{3\;1} - \binom{z_3}{2} - \binom{z_1 z_4}{2\;1} -$$
$$- \binom{z_2 z_4}{1\;1} + \binom{z_6}{1} - 5\binom{z_1}{5} + 3\binom{z_1 z_2}{3\;1} - \binom{z_1 z_2}{1\;2} - 2\binom{z_1 z_3}{2\;1} + \binom{z_1 z_4}{1\;1} +$$
$$+ 4\binom{z_1}{4} - 2\binom{z_1 z_2}{2\;1} + \binom{z_1 z_2}{1\;1} - 3\binom{z_1}{3} + \binom{z_1 z_2}{1\;1} + 2\binom{z_1}{2} - \binom{z_1}{1} \quad (m \geqq 8).$$

$$\varphi(1^6) = \binom{z_1}{6} - \binom{z_1 z_2}{4\ 1} + \binom{z_1 z_2}{2\ 2} - \binom{z_2}{3} + \binom{z_1 z_3}{3\ 1} - \binom{z_1 z_2 z_3}{1\ 1\ 1} + \binom{z_3}{2} +$$
$$- \binom{z_1 z_4}{2\ 1} + \binom{z_2 z_4}{1\ 1} + \binom{z_1 z_5}{1\ 1} - \binom{z_6}{1} - \binom{z_1}{5} + \binom{z_1 z_2}{3\ 1} - \binom{z_1 z_2}{1\ 2} -$$
$$- \binom{z_1 z_3}{2\ 1} + \binom{z_2 z_3}{1\ 1} + \binom{z_1 z_4}{1\ 1} - \binom{z_5}{1} + \binom{z_1}{4} - \binom{z_1 z_2}{2\ 1} + \binom{z_2}{2} +$$
$$+ \binom{z_1 z_3}{1\ 1} - \binom{z_4}{1} - \binom{z_1}{3} + \binom{z_1 z_2}{1\ 1} - \binom{z_3}{1} + \binom{z_1}{2} - \binom{z_2}{1} - \binom{z_1}{1} + 1 \quad (m \geqq 7).$$

Zur Berechnung der angegebenen Charaktere mögen die nachfolgenden Andeutungen genügen, in denen wir wie zuvor bei den ganzwertigen Funktionen $\varphi^{(\lambda)}(z)$ zur Vereinfachung der Schreibung setzen:

$$\pi_{\lambda_1}(\mathfrak{z}) * \pi_{\lambda_2}(\mathfrak{z}) * \cdots * \pi_{\lambda_k}(\mathfrak{z}) = \pi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$$

und dabei noch gleiche Indizes zu Potenzen zusammenfassen.

Für jede natürliche Zahl $k$ gilt nach Satz 2

$$\varphi(k) = \begin{vmatrix} \pi_0 & \pi_0 \\ \pi_{k-1} & \pi_k \end{vmatrix}^* = \pi_k - \pi_{k-1}.$$

Nach Tabelle 1 im Anhang gewinnen wir hiernach die Funktionen

$$\varphi(1), \quad \varphi(2), \quad \varphi(3), \quad \varphi(4), \quad \varphi(5), \quad \varphi(6).$$

Nach Satz 2 gilt ferner für jede natürliche Zahl $k$

$$\varphi(k,1) = \begin{vmatrix} \pi_0 & \pi_0 & \pi_0 \\ \pi_{k-1} & \pi_k & \pi_{k+1} \\ 0 & \pi_0 & \pi_1 \end{vmatrix}^* = \pi_k * \pi_1 - \pi_{k+1} - \pi_{k-1} * \pi_1 + \pi_{k-1}$$
$$= \pi(k,1) - \pi(k+1) - \pi(k-1,1) + \pi(k-1).$$

Hieraus ergeben sich die Funktionen

$$\varphi(1^2), \quad \varphi(2\,1), \quad \varphi(3\,1), \quad \varphi(4\,1), \quad \varphi(5\,1).$$

Als weitere Serien erhalten wir für jede natürliche Zahl $k$

$$\varphi(k,2) = \begin{vmatrix} \pi_0 & \pi_0 & \pi_0 \\ \pi_{k-1} & \pi_k & \pi_{k+1} \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 \end{vmatrix}^*$$
$$= \pi(k,2) - \pi(k+1,1) + \pi(k+1) - \pi(k-1,2) + \pi(k-1,1) - \pi(k)$$

und

$$\varphi(k,1^2) = \begin{vmatrix} \pi_0 & \pi_0 & \pi_0 & \pi_0 \\ \pi_{k-1} & \pi_k & \pi_{k+1} & \pi_{k+2} \\ 0 & \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 \\ 0 & 0 & \pi_0 & \pi_1 \end{vmatrix}^*$$
$$= \pi(k,1^2) + \pi(k+2) - \pi(k,2) - \pi(k+1,1) - .$$
$$- \pi(k-1,1^2) + \pi(k-1,2) + \pi(k-1,1) - \pi(k-1)$$

und damit die Funktionen

$$\varphi(2^2),\quad \varphi(32),\quad \varphi(42),\quad \varphi(1^3),\quad \varphi(21^2),\quad \varphi(31^2),\quad \varphi(41^2).$$

Schließlich finden wir für jede natürliche Zahl $k$

$$\varphi(k,3)=\begin{vmatrix}\pi_0 & \pi_0 & \pi_0\\ \pi_{k-1} & \pi_k & \pi_{k+1}\\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3\end{vmatrix}^*$$

$$=\pi(k,3)-\pi(k+1,2)+\pi(k+1,1)-\pi(k-1,3)+\pi(k-1,2)-$$
$$-\pi(k,1),$$

$$\varphi(k,2,1)=\begin{vmatrix}\pi_0 & \pi_0 & \pi_0 & \pi_0\\ \pi_{k-1} & \pi_k & \pi_{k+1} & \pi_{k+2}\\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3\\ 0 & 0 & \pi_0 & \pi_1\end{vmatrix}^*$$

$$=\pi(k,2,1)+\pi(k+1,1)-\pi(k,3)-\pi(k+1,1^2)-\pi(k-1,2,1)-$$
$$-\pi(k+2)+\pi(k-1,3)+\pi(k+1,1)+\pi(k-1,1^2)-\pi(k,1)-$$
$$-\pi(k-1,1)+\pi(k),$$

$$\varphi(k,1^3)=\begin{vmatrix}\pi_0 & \pi_0 & \pi_0 & \pi_0 & \pi_0\\ \pi_{k-1} & \pi_k & \pi_{k+1} & \pi_{k+2} & \pi_{k+3}\\ 0 & \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3\\ 0 & 0 & \pi_0 & \pi_1 & \pi_2\\ 0 & 0 & 0 & \pi_0 & \pi_1\end{vmatrix}^*$$

$$=\pi(k,1^3)+\pi(k,3)-2\pi(k,2,1)-\pi(k+1,1^2)-\pi(k+3)+$$
$$+\pi(k+1,2)+\pi(k+2,1)-\pi(k-1,1^3)-\pi(k-1,3)+$$
$$+2\pi(k-1,2,1)+\pi(k-1,1^2)-\pi(k-1,2)-\pi(k-1,1)+\pi(k-1)$$

und damit die Funktionen

$$\varphi(3^2),\quad \varphi(2^2\,1),\quad \varphi(3\,2\,1),\quad \varphi(1^4),\quad \varphi(2\,1^3),\quad \varphi(3\,1^3).$$

Die noch verbleibenden Funktionen

$$\varphi(1^5),\quad \varphi(2^3),\quad \varphi(2^2\,1^2),\quad \varphi(2\,1^4),\quad \varphi(1^6)$$

können in gleicher Weise berechnet werden. So erhält man:

$$\varphi(2^3)=\begin{vmatrix}\pi_0 & \pi_0 & \pi_0 & \pi_0\\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4\\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3\\ 0 & \pi_0 & \pi_1 & \pi_2\end{vmatrix}^*$$

$$=\pi(2^3)+\pi(3^2)+\pi(4\,1^2)-\pi(4\,2)-2\pi(3\,2\,1)-\pi(2^2\,1)-\pi(4\,1)+$$
$$+\pi(3\,1^2)+\pi(3\,2)+\pi(2\,1^2)+\pi(4)-\pi(3\,1)-\pi(2^2)-$$
$$-\pi(1^3)-\pi(3)+2\pi(2\,1).$$

## Anhang

Tabelle 1. *Primitive Funktionen der Dimension* $0 \leqq m_0 \leqq 10$

$$\pi_0 = 1$$

$$\pi_1 = \binom{z_1}{1}$$

$$\pi_2 = \binom{z_1}{2} + \binom{z_2}{1}$$

$$\pi_3 = \binom{z_1}{3} + \binom{z_1\, z_2}{1\ 1} + \binom{z_3}{1}$$

$$\pi_4 = \binom{z_1}{4} + \binom{z_1\, z_2}{2\ 1} + \binom{z_2}{2} + \binom{z_1\, z_3}{1\ 1} + \binom{z_4}{1}$$

$$\pi_5 = \binom{z_1}{5} + \binom{z_1\, z_2}{3\ 1} + \binom{z_1\, z_2}{1\ 2} + \binom{z_1\, z_3}{2\ 1} + \binom{z_2\, z_3}{1\ 1} + \binom{z_1\, z_4}{1\ 1} + \binom{z_5}{1}$$

$$\pi_6 = \binom{z_1}{6} + \binom{z_1\, z_2}{4\ 1} + \binom{z_1\, z_2}{2\ 2} + \binom{z_2}{3} + \binom{z_1\, z_3}{3\ 1} + \binom{z_1\, z_2\, z_3}{1\ 1\ 1} + \binom{z_3}{2} + \binom{z_1\, z_4}{2\ 1} +$$
$$+ \binom{z_2\, z_4}{1\ 1} + \binom{z_1\, z_5}{1\ 1} + \binom{z_6}{1}$$

$$\pi_7 = \binom{z_1}{7} + \binom{z_1\, z_2}{5\ 1} + \binom{z_1\, z_2}{3\ 2} + \binom{z_1\, z_2}{1\ 3} + \binom{z_1\, z_3}{4\ 1} + \binom{z_1\, z_2\, z_3}{2\ 1\ 1} + \binom{z_2\, z_3}{2\ 1} + \binom{z_1\, z_3}{1\ 2} +$$
$$+ \binom{z_1\, z_4}{3\ 1} + \binom{z_1\, z_2\, z_4}{1\ 1\ 1} + \binom{z_3\, z_4}{1\ 1} + \binom{z_1\, z_5}{2\ 1} + \binom{z_2\, z_5}{1\ 1} + \binom{z_1\, z_6}{1\ 1} + \binom{z_7}{1}$$

$$\pi_8 = \binom{z_1}{8} + \binom{z_1\, z_2}{6\ 1} + \binom{z_1\, z_2}{4\ 2} + \binom{z_1\, z_2}{2\ 3} + \binom{z_2}{4} + \binom{z_1\, z_3}{5\ 1} + \binom{z_1\, z_2\, z_3}{3\ 1\ 1} + \binom{z_1\, z_2\, z_3}{1\ 2\ 1} +$$
$$+ \binom{z_1\, z_3}{2\ 2} + \binom{z_2\, z_3}{1\ 2} + \binom{z_1\, z_4}{4\ 1} + \binom{z_1\, z_2\, z_4}{2\ 1\ 1} + \binom{z_2\, z_4}{2\ 1} + \binom{z_1\, z_3\, z_4}{1\ 1\ 1} + \binom{z_4}{2} + \binom{z_1\, z_5}{3\ 1} +$$
$$+ \binom{z_1\, z_2\, z_5}{1\ 1\ 1} + \binom{z_3\, z_5}{1\ 1} + \binom{z_1\, z_6}{2\ 1} + \binom{z_2\, z_6}{1\ 1} + \binom{z_1\, z_7}{1\ 1} + \binom{z_8}{1}$$

$$\pi_9 = \binom{z_1}{9} + \binom{z_1\, z_2}{7\ 1} + \binom{z_1\, z_2}{5\ 2} + \binom{z_1\, z_2}{3\ 3} + \binom{z_1\, z_2}{1\ 4} + \binom{z_1\, z_3}{6\ 1} + \binom{z_1\, z_2\, z_3}{4\ 1\ 1} + \binom{z_1\, z_2\, z_3}{2\ 2\ 1} +$$
$$+ \binom{z_2\, z_3}{3\ 1} + \binom{z_1\, z_3}{3\ 2} + \binom{z_1\, z_2\, z_3}{1\ 1\ 2} + \binom{z_3}{3} + \binom{z_1\, z_4}{5\ 1} + \binom{z_1\, z_2\, z_4}{3\ 1\ 1} + \binom{z_1\, z_2\, z_4}{1\ 2\ 1} + \binom{z_1\, z_3\, z_4}{2\ 1\ 1} +$$
$$+ \binom{z_2\, z_3\, z_4}{1\ 1\ 1} + \binom{z_1\, z_4}{1\ 2} + \binom{z_1\, z_5}{4\ 1} + \binom{z_1\, z_2\, z_5}{2\ 1\ 1} + \binom{z_2\, z_5}{2\ 1} + \binom{z_1\, z_3\, z_5}{1\ 1\ 1} + \binom{z_4\, z_5}{1\ 1} +$$
$$+ \binom{z_1\, z_6}{3\ 1} + \binom{z_1\, z_2\, z_6}{1\ 1\ 1} + \binom{z_3\, z_6}{1\ 1} + \binom{z_1\, z_7}{2\ 1} + \binom{z_2\, z_7}{1\ 1} + \binom{z_1\, z_8}{1\ 1} + \binom{z_9}{1}$$

$$\pi_{10} = \binom{z_1}{10} + \binom{z_1\, z_2}{8\ 1} + \binom{z_1\, z_2}{6\ 2} + \binom{z_1\, z_2}{4\ 3} + \binom{z_1\, z_2}{2\ 4} + \binom{z_2}{5} + \binom{z_1\, z_3}{7\ 1} + \binom{z_1\, z_2\, z_3}{5\ 1\ 1} +$$
$$+ \binom{z_1\, z_2\, z_3}{3\ 2\ 1} + \binom{z_1\, z_2\, z_3}{1\ 3\ 1} + \binom{z_1\, z_3}{4\ 2} + \binom{z_1\, z_2\, z_3}{2\ 1\ 2} + \binom{z_2\, z_3}{2\ 2} + \binom{z_1\, z_3}{1\ 3} + \binom{z_1\, z_4}{6\ 1} +$$
$$+ \binom{z_1\, z_2\, z_4}{4\ 1\ 1} + \binom{z_1\, z_2\, z_4}{2\ 2\ 1} + \binom{z_2\, z_4}{3\ 1} + \binom{z_1\, z_3\, z_4}{3\ 1\ 1} + \binom{z_1\, z_2\, z_3\, z_4}{1\ 1\ 1\ 1} + \binom{z_3\, z_4}{2\ 1} + \binom{z_1\, z_4}{2\ 2} +$$
$$+ \binom{z_2\, z_4}{1\ 2} + \binom{z_1\, z_5}{5\ 1} + \binom{z_1\, z_2\, z_5}{3\ 1\ 1} + \binom{z_1\, z_2\, z_5}{1\ 2\ 1} + \binom{z_1\, z_3\, z_5}{2\ 1\ 1} + \binom{z_2\, z_3\, z_5}{1\ 1\ 1} + \binom{z_1\, z_4\, z_5}{1\ 1\ 1} +$$
$$+ \binom{z_5}{2} + \binom{z_1\, z_6}{4\ 1} + \binom{z_1\, z_2\, z_6}{2\ 1\ 1} + \binom{z_2\, z_6}{2\ 1} + \binom{z_1\, z_3\, z_6}{1\ 1\ 1} + \binom{z_4\, z_6}{1\ 1} + \binom{z_1\, z_7}{3\ 1} + \binom{z_1\, z_2\, z_7}{1\ 1\ 1} +$$
$$+ \binom{z_3\, z_7}{1\ 1} + \binom{z_1\, z_8}{2\ 1} + \binom{z_2\, z_8}{1\ 1} + \binom{z_1\, z_9}{1\ 1} + \binom{z_{10}}{1}$$

Tabelle 2. **-Produkte der Dimension $0 \leqq m_0 \leqq 6$ aus primitiven Funktionen*

$$\pi(1^2) = 2\begin{pmatrix} z_1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\pi(2\,1) = 3\begin{pmatrix} z_1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi(1^3) = 6\begin{pmatrix} z_1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\pi(3\,1) = 4\begin{pmatrix} z_1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi(2^2) = 6\begin{pmatrix} z_1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\pi(2\,1^2) = 12\begin{pmatrix} z_1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi(1^4) = 24\begin{pmatrix} z_1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\pi(4\,1) = 5\begin{pmatrix} z_1 \\ 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 & z_4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi(3\,2) = 10\begin{pmatrix} z_1 \\ 5 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2 & z_3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi(3\,1^2) = 20\begin{pmatrix} z_1 \\ 5 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi(2^2\,1) = 30\begin{pmatrix} z_1 \\ 5 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\pi(2\,1^3) = 60\begin{pmatrix} z_1 \\ 5 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi(1^5) = 120\begin{pmatrix} z_1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\pi(5\,1) = 6\begin{pmatrix} z_1 \\ 6 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} z_1 & z_4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 & z_5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi(4\,2) = 15\begin{pmatrix} z_1 \\ 6 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} z_2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 & z_4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2 & z_4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi(4\,1^2) = 30\begin{pmatrix} z_1 \\ 6 \end{pmatrix} + 12\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} z_1 & z_4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi(3^2) = 20\begin{pmatrix} z_1 \\ 6 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} z_3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\pi(3\,2\,1) = 60\begin{pmatrix} z_1 \\ 6 \end{pmatrix} + 16\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi(3\,1^3) = 120\begin{pmatrix} z_1 \\ 6 \end{pmatrix} + 24\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi(2^3) = 90\begin{pmatrix} z_1 \\ 6 \end{pmatrix} + 18\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} z_2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\pi(2^2\,1^2) = 180\begin{pmatrix} z_1 \\ 6 \end{pmatrix} + 24\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\pi(2\,1^4) = 360\begin{pmatrix} z_1 \\ 6 \end{pmatrix} + 24\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi(1^6) = 720\begin{pmatrix} z_1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

*Erlangen, Mathematisches Institut der Universität*

*(Eingegangen am 6. Juli 1959)*

**Rembs, E.**
**Math. Zeitschr. 73, 330–332 (1960)**

# Über die Verbiegbarkeit der Rinnen. II

Oskar Perron zum 80. Geburtstag am 7. Mai 1960

Von

**Eduard Rembs**

Im ersten Teil dieser Arbeit [Math. Z. **71**, 89–93 (1959)] war die Frage unbeantwortet geblieben, ob es zu einer konvexen geschlossenen Rinne isometrische Flächen gibt, bei denen der parabolischen Kurve der Rinne eine geschlossene Raumkurve entspricht.

Diese Frage kann ich auch jetzt nicht vollständig beantworten*), möchte aber einen Sonderfall angeben, in dem man zum Ziel kommt. Vielleicht läßt sich der allgemeine Fall ähnlich erledigen.

Ich knüpfe an die Fußnote S. 91 an, deren Bezeichnungen ich beibehalte, will aber noch zweierlei voraussetzen, nämlich 1. daß die parabolische Kurve der Rinne stetig gekrümmt ist und 2. daß auf ihr für die Krümmung $K$ zwar gilt $K=0$, aber nicht gleichzeitig in einem Punkt $K_x=0$, $K_y=0$. Diese Voraussetzung ist z. B. für die Rinnen eines gewöhnlichen Torus erfüllt.

Man denke sich das von der parabolischen Kurve der Rinne berandete Ebenenstück auf einen Zylinder verbogen, dessen Erzeugenden parallel der $x$-Achse sind und der so beschaffen ist, daß die Abbildung schlicht und eineindeutig in die $x$, $y$-Ebene projizierbar wird. Auch soll das Ebenenstück bei der Abwicklung keine Drehung um die $z$-Achse erfahren. Man betrachte den zylindrischen Streifen $S_1$, in den der ebene parabolische Streifen $S$ der Rinne übergeht. Es soll gezeigt werden, daß durch $S_1$ sich keine zu der Rinne isometrische Fläche legen läßt. Es ergibt sich nämlich, daß die zweiten Ableitungen $\varrho, \sigma, \tau$ längs $S_1$ zwar überall eindeutig und stetig zu bestimmen sind, die Gleichungen für die dritten Ableitungen aber zu einem Widerspruch führen. Nach der Formel der Fußnote ist

$$\varrho : \sigma : \tau : 1 = \pi'^2 : \pi'\varkappa' : \varkappa'^2 : (\pi' x' + \varkappa' y').$$

Auf $S_1$ ist aber überall $\pi = 0$, also $\varrho = \sigma = 0$. Wir betrachten insbesondere einen Punkt $P$, in dem die Streifenkurve von einer Erzeugenden berührt wird. In $P$ ist bei den gemachten Annahmen $y' = 0$ und, da $\varkappa$ ein Extremum hat, auch $\varkappa' = 0$. Der Streifen ist in $P$ Schmiegstreifen, ein Fall der in Satz 4 der Arbeit ausgeschlossen war. Man kann aber auch in $P$ $\tau$ eindeutig und stetig machen, indem man nach de l'Hospital

$$\tau = \lim \frac{\varkappa'}{y'} = \frac{\varkappa''}{y''}$$

setzt; in $P$ ist $y'' \neq 0$, $\tau = 0$ oder $\neq 0$ je nach Vorgabe von $\varkappa$.

*) Vgl. aber die Zufügungen 2 und 3 am Schluß.

Wir gehen zu den dritten Ableitungen über, die folgendermaßen heißen mögen:

$$\varrho_x, \varrho_y = \sigma_x, \sigma_y = \tau_x, \tau_y.$$

Zu ihrer Bestimmung aus den Vorgaben $\pi, \varkappa$ und den schon bestimmten Werten $\varrho, \sigma, \tau$ haben wir 5 Gleichungen, zunächst die zwei, die man durch Differenzieren der partiellen Differentialgleichung nach $x$ und $y$ erhält, wenn man dann noch $p = q = rt - s^2 = \pi = \varrho = \sigma = 0$ setzt. Sie lauten

$$\tau\varrho_x - rs\varkappa\tau + (\varkappa^2 - 1)(rt - s^2)_x = 0, \tag{1}$$

$$\tau\varrho_y - rt\varkappa\tau + (\varkappa^2 - 1)(rt - s^2)_y = 0. \tag{2}$$

Dazu kommen die 3 Gleichungen

$$\varrho_x x' + \varrho_y y' = \varrho' = 0, \tag{3}$$

$$\sigma_x x' + \sigma_y y' = \sigma' = 0, \tag{4}$$

$$\tau_x x' + \tau_y y' = \tau'. \tag{5}$$

Sei $\tau \neq 0$. Solange $y' \neq 0$ ist, bestimmen diese Gleichungen die 4 dritten Ableitungen, (1) und (2) $\varrho_x$ und $\varrho_y$ im Einklang mit (3). Es ist ja $sx' + ty' = q' = 0$ und

$$(rt - s^2)_x x' + (rt - s^2)_y y' = (rt - s^2)' = 0. \tag{6}$$

(4) und (5) liefern $\sigma_y$ und $\tau_y$.

Wir betrachten wieder einen Punkt $P$. In ihm sei insbesondere $\tau \neq 0$. Wegen $rx' + sy' = p' = 0$ ist für $y' = 0$ auch $r = 0$, und aus (4) folgt, daß $\sigma_x = \varrho_y = 0$ ist. Wenn nicht schon $\varkappa^2 \neq 1$ ist, kann man das durch Drehung des Zylinders um die $x$-Achse erreichen. Dann würde aus (2) folgen

$$(rt - s^2)_y = 0. \tag{7}$$

Nun ist nach (6) $(rt - s^2)_x = 0$ für $y' = 0$ und also $K_x = 0$. Aber die Gl. (7) ist unmöglich, da in keinem Punkte gleichzeitig $K_x = 0$ und $K_y = 0$ sein sollte. Somit kommen wir zu einem Widerspruch.

Ist in $P$ $\tau = 0$, so führt die Gl. (2) allein schon zu demselben Widerspruch. Durch den zylindrischen Streifen läßt sich keine zu der Rinne isometrische Fläche legen.

Zufügungen bei der Korrektur: 1. Die Bedingung 2 für die Fläche kann überraschenderweise in eine solche für die parabolische Kurve umgewandelt werden, dieselbe Bedingung übrigens, die auch beim Starrheitsbeweis eine Rolle spielte. Wir führen solche Parameter ein, daß auf der parabolischen Kurve $M$ und $N$ nebst allen Ableitungen beliebig hoher Ordnung nach $v$ verschwinden, während $L \neq 0$ ist. Auf der Kurve sei ferner $F = 0$. Die Bedingung 2 ist dann mit $N_u \neq 0$ auf der Kurve identisch. Nach Codazzi ist aber $N_u + \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{matrix} \right\} L = 0$, woraus folgt $\left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{matrix} \right\} \neq 0$. *Das besagt* (Bianchi-Lukat 2. Aufl., S. 147), *daß die geodätische Krümmung der parabolischen Kurve, die im vorliegenden Fall identisch ist mit der gewöhnlichen Krümmung, nirgends verschwinden soll.* 2. Wie zu vermuten war, gestaltet sich der Beweis im

allgemeinen Fall auch nach dem oben vorgezeichneten Schema. Unter dem allgemeinen Fall verstehe ich dabei, daß man den Streifen $S_1$ erhält, indem man das von der parabolischen Kurve berandete ebene Gebiet auf eine beliebige abwickelbare Fläche ohne Drehung um die $z$-Achse verbiegt, natürlich auf ein singularitätenfreies Stück. Wir können annehmen, daß die abwickelbare Fläche (Kegel oder Torse) die $x, y$-Ebene längs der $x$-Achse, die Erzeugende ist, berührt und der Punkt $P$, in dem der Streifen $S_1$ Schmiegstreifen ist, auf der $x$-Achse liegt, die von der parabolischen Kurve berührt wird. Jetzt ist auf $S_1$ $\pi \not\equiv 0$, aber in $P$ ist $\pi = \varkappa = y' = 0$. Außerdem ist bei Annäherung an die $x$-Achse auf der Fläche in jedem Fall $\pi/\varkappa = 0$. (Im Fall der Torse verwendet man zum Beweis die kanonische Darstellung der Gratlinie.) Auf der parabolischen Kurve aber haben $\pi$ und $\varkappa$ in $P$ beide Extrema, da sie auf der $x$-Achse verschwinden, in der Umgebung außer im oben behandelten zylindrischen Fall aber nicht. Somit müssen, wenn wir sie als Funktionen der von $P$ aus gemessenen Bogenlänge $s$ der Kurve nehmen, die ersten nicht verschwindenden Ableitungen von gerader Ordnung sein. Daher muß $\pi'/\varkappa'$ mindestens wie $s^2$ verschwinden. Wir bestimmen wieder nach DE L'HOSPITAL den Wert von $\tau = \varkappa'^2 : (\pi' x' + \varkappa' y')$ in $P$. Man erhält $\tau = \varkappa''/y''$ wegen $(\pi'/\varkappa')' = 0$. Jetzt wird die Gleichung $\varkappa' = \sigma x' + \tau y'$, aus der noch $\sigma = 0$ in $P$ folgt, differenziert: $\varkappa'' = \sigma' x' + \sigma x'' + \tau' y' + \tau y''$. Aber in $P$ ist $\sigma = \tau' = x'' = y' = 0$ und, wie gerade gezeigt wurde, $\varkappa'' = \tau y''$, so daß man $\sigma' = 0$ erhält und damit wieder die Gl. (4), jetzt nicht in $s$ identisch, aber doch in $P$ gültig, wonach der Schluß wie oben verläuft. *Durch keinen Streifen, den man durch Verbiegen des geschlossenen ebenen parabolischen Streifens einer Rinne auf eine beliebige abwickelbare Fläche bei Mitverbiegen des umschlossenen Ebenenstücks erhält, läßt sich eine zu der geschlossenen Rinne isometrische Fläche legen, wenn die Krümmung der parabolischen Kurve der Rinne nirgends verschwindet.* Das Ergebnis des Beweises könnte natürlich auch als ein allgemeinerer lokaler Satz formuliert werden. 3. Der vorstehende Beweis gilt mit leichten Änderungen für alle zu einem ebenen geschlossenen Streifen isometrischen Streifen $S_1$, auf denen Stellen mit stationärer Streifennormale $\xi$ so wie $P$ vorkommen, auch wenn die Streifenkurve nirgends die zugehörige Erzeugende der abwickelbaren Streifenfläche berührt, sondern alle Erzeugenden schneidet. Anders verhält es sich mit den zu $S$ isometrischen Streifen mit $\xi' \neq 0$ in allen Punkten. Als Beispiel diene ein Streifen, der auf einem durchweg gleichsinnig gekrümmten Kegel vom Sektorwinkel bei Abwicklung $2\pi$ mit Durchdringungslinien liegt, der ferner die Kegelspitze umschließt und alle Erzeugenden schneidet; der Streifen selbst braucht sich nicht zu durchdringen. Es gibt auch Streifen $S_1$ mit überall $\xi' \neq 0$, in die ein geschlossener konvexer ebener Streifen ohne Zerschneiden stetig verbogen werden kann. Durch Streifen mit $\xi' \neq 0$ aber muß sich nach der Theorie von CAUCHY, der bewiesenen lokalen Eindeutigkeit und dem Heine-Borelschen Theorem eine zu einer geschlossenen Rinne isometrische Fläche legen lassen.

*Berlin-Friedenau, Begasstraße 7*

*(Eingegangen am 6. August 1959)*

MERKES, E. P., and W. T. SCOTT
Math. Zeitschr. 73, 333–338 (1960)

# Covering theorems for S-fractions

To OSKAR PERRON on his 80th birthday

By

**E. P. MERKES and W. T. SCOTT**

1. INTRODUCTION. A function $f(z)$ of a complex variable $z$ is said to be in class $K$ if for $|z|<1$

$$f(z)=\frac{z}{1}+\frac{a_1 z}{1}+\cdots+\frac{a_n z}{1}+\cdots, \tag{1.1}$$

where the complex numbers $a_n$ satisfy $|a_n|\leqq\frac{1}{4}$, $(n=1, 2, \ldots)$. It follows from an elementary convergence theorem ([9, p. 42] or [4, p. 61]) that each function in $K$ is regular for $|z|<1$.

It was shown by THALE [8] that each function in $K$ is univalent for $|z|<12\sqrt{2}-16$, and PERRON [5] showed that there is no larger circle with center at the origin which has this property by exhibiting the function

$$\frac{z}{1}+\frac{\frac{1}{4}z}{1}-\frac{\frac{1}{4}z}{1}-\cdots-\frac{\frac{1}{4}z}{1}-\cdots=\frac{2z}{3-\sqrt{1-z}}, \tag{1.2}$$

whose derivative vanishes at $z=12\sqrt{2}-16$. Since for real $\vartheta$, $e^{-i\vartheta}f(e^{i\vartheta}z)$ is in $K$ whenever $f(z)$ is in $K$, it follows that there is no larger region, properly containing the disc $|z|<12\sqrt{2}-16$, in which all functions in $K$ are univalent.

In Section 2 sharp inner and outer circular bounds are given for the map of $|z|<12\sqrt{2}-16$ by a function in $K$. These are special cases of results recently given in [2]. In Section 3, rotational normalization of $K$ leads to the class $K_*$, for whose functions sharp inner and outer non-circular bounds on the maps are obtained. Section 4 is devoted to an analog for $K$ of the Bloch constant [1] and Section 5 gives an analog of a result of SZEGÖ [7] on diametral covering.

2. AN ELEMENTARY COVERING THEOREM. If $f(z)\in K$, a value region theorem of PAYDON and WALL [3] states that

$$\left|\frac{f(z)}{z}-\frac{1}{1-r^2}\right|\leqq\frac{r}{1-r^2}, \qquad 0<r\leqq\frac{1}{2}, \tag{2.1}$$

whenever $|z|\leqq 4r(1-r)$. Moreover, for each $\vartheta$, $0\leqq\vartheta<2\pi$, and for each boundary point of the disc (2.1) there exists an $\alpha$, $0\leqq\alpha<2\pi$, such that

$$\frac{f(z;\alpha,\vartheta)}{z}=\frac{1}{1}+\frac{\frac{1}{4}e^{i(\alpha-)\vartheta}z}{1}-\frac{\frac{1}{4}e^{-i\vartheta}z}{1}-\cdots-\frac{\frac{1}{4}e^{-i\vartheta}z}{1}-\cdots \tag{2.2}$$

yields this boundary point at $z=4r(1-r)e^{i\vartheta}$. In particular, the sharp inequalities

$$\frac{2|z|}{3-\sqrt{1-|z|}} \leqq |f(z)| \leqq 2\left(1-\sqrt{1-|z|}\right), \tag{2.3}$$

$$\left|\arg \frac{f(z)}{z}\right| \leqq \arcsin \frac{1-\sqrt{1-|z|}}{2}, \tag{2.4}$$

where $|z|=4r(1-r)$, $0<r\leqq\frac{1}{2}$, are obtained from (2.1).

If $|z|=12\sqrt{2}-16$ (*i.e.* $r=\sqrt{2}-1$) in (2.3), the following elementary covering theorem results:

THEOREM 2.1. *If $f(z)\in K$, the map of $|z|<12\sqrt{2}-16$ by $w=f(z)$ contains all points in the disc $|w|<12-8\sqrt{2}$ and is contained in the disc $|w|<4(\sqrt{2}-1)$. These bounds are sharp.*

The sharpness of the bounds is an immediate consequence of the previously stated property of $f(z;\alpha,\vartheta)$.

3. THE CLASS $K_+$. Let $K_+$ denote the subclass of $K$ consisting of the identity function, $z$, and those functions in $K$ which have $S$-fractions (1.1) with $0<a_1\leqq\frac{1}{4}$, $|a_n|\leqq\frac{1}{4}$, $(n=2,3,\ldots)$. Since for real $\vartheta$, $0\leqq\vartheta<2\pi$, $e^{-i\vartheta}f(e^{i\vartheta}z)\in K$ whenever $f(z)\in K$, it follows that to each function in $K$ there corresponds by such a transformation a uniquely determined function in $K_+$. It is clear that each function in $K_+$ is univalent in the disc $|z|<12\sqrt{2}-16$, and the function (1.2) shows that there is no larger concentric disc of univalence for $K_+$.

The sharp inner boundary for functions in $K$, provided by the left member of (2.3), is improved for functions in $K_+$ by the following result:

THEOREM 3.1. *If $f(z)\in K_+$, the map of $|z|<4r(1-r)$, $0<r\leqq\frac{1}{2}$ by $w=f(z)$ contains all points in the open region of the $w$-plane bounded by the contour $w=\varrho e^{i\varphi}$, where*

$$\varrho=\frac{4r(1-r)}{(1+r)(1+r^2)}\left[\sqrt{(1+r+r^2)^2-r^2\sin^2\varphi}-r\cos\varphi\right], \quad 0\leqq|\varphi|\leqq\varphi_1, \tag{3.1a}$$

$$\varrho=4r(1-r)\left[\sqrt{1-r^2}\,|\sin\varphi|-r\cos\varphi\right], \quad \varphi_1\leqq|\varphi|\leqq\varphi_2, \tag{3.1b}$$

$$\varrho=4r(1-r), \quad \varphi_2\leqq|\varphi|\leqq\pi, \tag{3.1c}$$

*with*

$$\varphi_1=\arccos\left[-r^2\sqrt{\frac{1+r}{1+r+r^2-r^3}}\right], \tag{3.2a}$$

$$\varphi_2=\arccos(-r). \tag{3.2b}$$

*Moreover, the result is sharp for each $\varphi$, $-\pi\leqq\varphi\leqq\pi$.*

PROOF. Let $f(z)\in K_+$, $f(z)\not\equiv z$, and put

$$f_1(z)=\frac{1}{a_1}\left[\frac{z}{f(z)}-1\right], \tag{3.3}$$

where $a_1$, $0<a_1\leqq\frac{1}{4}$, is the coefficient of $z$ in the second partial numerator of the $S$-fraction (1.1) for $f(z)$. Since $f_1(z)\in K$, (2.1) is applicable and it follows from (3.3) that

$$\left|\frac{1}{f(z)}-\frac{(1+r)e^{-i\vartheta}+4a_1r}{4r(1-r^2)}\right|\leqq\frac{a_1r}{1-r^2}, \tag{3.4}$$

where $z=4r(1-r)e^{i\vartheta}$, $-\pi\leqq\vartheta\leqq\pi$. By the triangle inequality

$$\left|\zeta-\frac{a_1}{1-r^2}\right|\leqq\frac{1+r+4a_1r^2}{4r(1-r^2)}, \tag{3.5}$$

where $\zeta=1/f(z)$. Note that (3.5) is valid for all functions of $K_+$ including the identity function ($a_1=0$).

For fixed $r$, $0<r\leqq\frac{1}{2}$, (3.5) defines a one parameter family of closed discs in terms of the parameter $a_1$, $0\leqq a_1\leqq\frac{1}{4}$. The union of the family of discs is a closed region which contains the values of $\zeta=1/f(z)$ when $|z|=4r(1-r)$. A simple computation shows that the boundary of the region in question is composed of arcs of circular boundaries of (3.5) for $a_1=0$ and $a_1=\frac{1}{4}$, plus the adjoining line segments along the tangents to these two circles. Since $f(z)=1/\zeta$ it follows that the values of $f(z)$ for $|z|=4r(1-r)$ lie in the image of the above region under the mapping $w=1/\zeta$. This image is readily found to be the curve given by (3.1) and (3.2), plus the region exterior to the cuvre, and the desired result on covering by functions in $K_+$ is established.

In order to establish the sharpness of the result let $w_0$ be any point on the boundary defined by (3.1) and (3.2), and let $\zeta_0=1/w_0$ be the corresponding point on the boundary of the union of the discs (3.5). To each such $\zeta_0$ there is one and only one value of $a_1$, $0\leqq a_1\leqq\frac{1}{4}$, for which $\zeta_0$ satisfies (3.5) with actual equality. If $a_1=0$ the function $f(z)=z$, in $K_+$, produces the boundary value $w_0$. If $0<a_1\leqq\frac{1}{4}$, then there is a $\beta$, $-\pi\leqq\beta\leqq\pi$, such that

$$\zeta_0=\frac{a_1}{1-r^2}+\frac{4a_1r^2+r+1}{4r(1-r^2)}e^{i\beta}.$$

It is easily seen that $a_1^{-1}[\zeta_0-\frac{1}{4}r(1-r)e^{-i\beta}]$ is a boundary point for the disc (2.1) and, as noted in Section 2, there is a function $f_1(z;\alpha,-\beta)$ in $K$ for which this boundary point is assumed when $z=4r(1-r)e^{-i\beta}$. The function

$$f(z)=\frac{z}{1+a_1f_1(z;\alpha,-\beta)},$$

which belongs to $K_+$, takes on the value $w_0$ for $z=4r(1-r)e^{-i\beta}$, and the proof of the statement on sharpness is complete.

For a univalent covering let $r=\sqrt{2}-1$ in (3.1). This yields an analog of a theorem of Scott [6] for the class of regular univalent functions in the unit circle.

By (2.3) the modulus of a function in $K$ is contained in a circle with center at the origin and radius $4r$ when $|z|=4r(1-r)$. For $K_+$ the following stronger result holds:

THEOREM 3.2. *If $f(z)\in K_+$, the map of $|z|<4r(1-r)$, $0<r\leqq\frac{1}{2}$, by $w=f(z)$ is contained in the open region of the $w$-plane bounded by the contour $w=\varrho e^{i\varphi}$, where*

$$\varrho=4r(1-r),\qquad 0\leqq|\varphi|\leqq\arccos\frac{(3-r)r}{2}, \tag{3.6a}$$

$$\varrho=\frac{4r(1-r^2)}{\sqrt{(1+r-r^2)^2-r^2\sin\varphi}+r\cos\varphi},\qquad \arccos\frac{(3-r)r}{2}\leqq|\varphi|\leqq\pi. \tag{3.6b}$$

*The result is sharp for each $\varphi$, $|\varphi|\leqq\pi$.*

PROOF. For $f(z)\in K_+$, (3.4) and the triangle inequality yield

$$\left|\zeta-\frac{a_1}{1-r^2}\right|\geqq\frac{1+r-4a_1r^2}{4r(1-r^2)} \tag{3.7}$$

where $\zeta=1/f(z)$ and $|z|=4r(1-r)$. For fixed $r$, $0<r\leqq\frac{1}{2}$, (3.7) defines for $0\leqq a_1\leqq\frac{1}{4}$ a one parameter family of closed circular exteriors in the $\zeta$-plane. Computation shows that the union of the regions (3.7) is the closed region which is exterior to the intersection of the excluded open discs (3.7) for $a_1=0$ and $a_1=\frac{1}{4}$. Since the values of $\zeta=1/f(z)$ for $|z|=4r(1-r)$ lie in the region described above, the values of $f(z)=1/\zeta$ lie in the image of this region by the mapping $w=1/\zeta$. The boundary of the image is readily found to be the contour $w=\varrho e^{i\varphi}$, where $\varrho$ is given by (3.6).

An argument similar to that for Theorem 3.1 establishes the sharpness of the result.

4. ANALOG OF THE BLOCH CONSTANT. For $f(z)\in K$ and for fixed $r$, $0<r\leqq\frac{1}{2}$, let $R(f,r)$ denote the least upper bound of the radii of those circles whose interiors are contained in the map of $|z|<4r(1-r)$ by $f(z)$, and let

$$R(r)=\operatorname{glb}R(f,r),\qquad f\in K. \tag{4.1}$$

The existence of $R(f,r)$ and of $R(r)$ is assured by (2.3).

THEOREM 4.1.

$$2r(1-r)\left(1+\sqrt{1-r^2}\right)\leqq R(r)\leqq 4r(1-r),\qquad 0<r\leqq\tfrac{1}{2}. \tag{4.2}$$

PROOF. Since a rotation transforms a function in $K$ to a function in $K_+$ it suffices to consider only functions in $K_+$.

For $f(z)\in K_+$ and for $|z|=4r(1-r)$, (3.5) yields

$$|f(z)-\mu(a_1,r)|\geqq\lambda(a_1,r) \tag{4.3}$$

where $0\leqq a_1\leqq\frac{1}{4}$ and

$$\mu(a_1,r)=-\frac{16r^2(1-r)a_1}{1+r+8r^2a_1-16r^2(1-r)a_1^2} \tag{4.4}$$

$$\lambda(a_1,r)=\frac{4r(1-r)(1+r+4r^2a_1)}{1+r+8r^2a_1-16r^2(1-r)a_1^2}. \tag{4.5}$$

For fixed $r$, $0<r\leqq\frac{1}{2}$, $\lambda(a_1, r)$ has a minimum for $0\leqq a_1\leqq\frac{1}{4}$ at

$$a_1^* = \frac{\sqrt{1-r^2}-(1-r^2)}{4r^2(1-r)}. \tag{4.6}$$

Since $\mu(a_1, r)$ is, by Theorem 3.1, in the image of $|z|<4r(1-r)$ by $w=f(z)$, and since the distance from $\mu(a_1, r)$ to the image of $|z|=4r(1-r)$ is not less than $\lambda(a_1, r)$, it follows that the map of $|z|\leqq 4r(1-r)$ by any function in $K_+$ contains a circle of radius $\lambda(a^*, r)=2r(1-r)\left(1+\sqrt{1-r^2}\right)$.

The right hand inequality (4.2) is an immediate consequence of the fact that the identity function is in $K_+$.

The following corollary gives an analog of the Bloch constant:

COROLLARY 4.1. *There exists a constant $B$ such that the map of $|z|<1$ by any function in $K$ univalently covers an open circular disc of radius $B$. Moreover,*

$$.938 < R(r^*) \leqq B \leqq 1, \tag{4.7}$$

*where $r^*$ is the smallest positive root of*

$$9r^3 - 3r^2 - 7r + 3 = 0. \tag{4.8}$$

PROOF. The existence of the constant $B$ is assured by the fact that the class $K$ is a class of bounded functions for $|z|<1$. From the proof of Theorem 4.1 it follows that for any function in $K$ the map of $|z|\leqq 4r(1-r)$ gives a univalent covering of an open disc of radius $R(r)$. The validity of the left hand inequalities is easily established by noting that the left member of (4.2) is an increasing function of $r$ for $0\leqq r<r^*$, where $r^*>.465$. The right hand inequality (4.7) is an immediate consequence of the fact that the identity function is in $K$.

It is of interest to note that the largest disc contained in the map of the circular domain of univalence, $|z|<12\sqrt{2}-16$, by a function in $K$ has radius at least as large as $R\left(\sqrt{2}-1\right)>.926$ and no larger than $12\sqrt{2}-16<.971$.

5. A DIAMETRAL COVERING THEOREM. The following theorem for the class $K$ is an analog of a result of SZEGÖ [7] on diametral covering for the class of regular univalent functions in the unit circle.

THEOREM 5.1. *If $\eta$ and $\zeta$ are omitted values of $f\in K$ for $|z|<4r(1-r)$ and if* $\arg\eta-\arg\zeta=\pi$, *then*

$$|\eta-\zeta| \geqq 8r(1-r)/\sqrt{1+r^2}. \tag{5.1}$$

PROOF. As before, it suffices to consider only functions of $K_+$.

From the proof of Theorem 4.1 it is seen that any omitted value, $w$, must satisfy $|w-\mu|\geqq\lambda$, where $\mu=\mu(a_1, r)$ and $\lambda=\lambda(a_1, r)$ are given by (4.4) and (4.5). If $\eta_1$ and $\zeta_1$ are on the circle $|w-\mu|=\lambda$ and $\arg\eta_1-\arg\zeta_1=\pi$, a simple geometric argument shows that

$$\begin{cases} |\eta_1|+|\zeta_1| \geqq 2\sqrt{\lambda^2-\mu^2} \\ \qquad = \dfrac{8r(1-r)}{1+r+8r^2a_1-16r^2(1-r)a_1^2}\sqrt{(1+r+4a_1r^2)^2-16r^2a_1^2}. \end{cases} \tag{5.2}$$

Computation shows that the derivative with respect to $a_1$ of the square of the right member of (5.2) is negative for $0 \leqq a_1 \leqq \frac{1}{4}$. Thus the right member of (5.2) is minimal for $a_1 = \frac{1}{4}$, and

$$|\eta_1| + |\zeta_1| \geqq 8r(1-r)/\sqrt{1+r^2}$$

holds for each $f \in K$. The desired result, (5.1), follows from the fact that $|\eta - \zeta| \geqq |\eta_1| + |\zeta_1|$.

## References

[1] LANDAU, E.: Über die Blochsche Konstante und zwei verwandte Weltkonstanten. Math. Z. **30**, 608–634 (1929). — [2] MERKES, E. P., and W. T. SCOTT: Univalence of a continued fraction. Pac. J. Math. (to appear). — [3] PAYDON, J. F., and H. S. WALL: The continued fraction as a sequence of linear transformations. Duke Math. J. **9**, 360–372 (1942). — [4] PERRON, O.: Die Lehre von den Kettenbrüchen, vol. II. Stuttgart: B. G. Teubner 1957. — [5] PERRON, O.: Über eine Schlichtheitsschranke von JAMES S. THALE. S.-B. Bayr. Akad. Wiss., Math.-Nat. Kl. **1956**, 233–236. — [6] SCOTT, W. T.: A covering theorem for univalent functions. Amer. Math. Monthly **64**, 90–94 (1957). — [7] SZEGÖ, G.: Relative Minimalflächen. Jahresber. Deutsche Math.-Ver. **31**, 41–42 (1922). — [8] THALE, J. S.: Univalence of continued fractions and Stieltjes transforms. Proc. Amer. Math. Soc. **7**, 12–19 (1956). — [9] WALL, H. S.: Analytic theory of continued fractions. New York: Van Nostrand 1948.

*Marquette University, Milwaukee, Wisconsin (U.S.A.)*

*Northwestern University, Evanston, Illinois (U.S.A.)*

*(Eingegangen am 15. Oktober 1959)*

WALSH, J. L.
Math. Zeitschr. 73, 339–345 (1960)

# On the Asymptotic Properties of Extremal Polynomials with Prescribed Constant Term*)

Dedicated to OSKAR PERRON in honor of his eightieth anniversary

By
J. L. WALSH

Let $E$ be a closed bounded point set of the $z$-plane, and among all polynomials each of the form

$$p_n(z) \equiv z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \tag{1}$$

with norm

$$\| p_n(z) \| = \max [ | p_n(z) |, \quad z \text{ on } E ], \tag{2}$$

let $T_n(z)$ be that polynomial (known to exist and be unique) whose norm is least. Then it is a well-known result due to FEKETE that we have

$$\lim_{n \to \infty} \| T_n(z) \|^{1/n} = \tau(E), \tag{3}$$

where $\tau(E)$ is the transfinite diameter (capacity) of $E$. The analogue of the striking relation (3) for the polynomials of least norm may persist even if the coefficient $a_1$ in (1) is prescribed, depending on $n$, and indeed if several coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_k$ are prescribed; this fact was shown in a recent paper [1] by FEKETE and WALSH. The object of the present note is to study the analogue of (3) for the polynomials of least norm where the numbers $a_n = A_n$ are prescribed; under suitable conditions on $E$ we obtain necessary and sufficient conditions on the $A_n$ that the analogue of (3) be valid.

THEOREM 1. *Let $E$ be an infinite closed bounded set containing the origin 0, and let*

$$F_n(z) \equiv z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + A_n \tag{4}$$

*be the (any) polynomial of the form indicated of least norm, where the $A_n$ are prescribed; a necessary and sufficient condition that we have*

$$\lim_{n \to \infty} \| F_n(z) \|^{1/n} = \tau(E) \tag{5}$$

*is*

$$\limsup_{n \to \infty} |A_n|^{1/n} \leqq \tau(E). \tag{6}$$

The existence of at least one $F_n(z)$ of least norm follows readily by the Montel theory of normal families of functions, but $F_n(z)$ need not be unique. Counter-example:

*) This research was supported (in part) by the United States Air Force Office of Scientific Research under Contract No. AF 18(600)–1461.

$E$: $0 \leqq z \leqq 1$, $n=2$, $A_n=1$; both polynomials $z^2-z+1$ and $z^2-2z+1$ have norm unity; no $F_n(z)$ has norm less than unity, since $F_n(0)=1$.

The necessity of (6) is immediate, for $F_n(0)=A_n$, whence $|A_n| \leqq \|F_n(z)\|$, and (6) follows from (5).

It is a consequence of (3) that for any sequence of polynomials $p_n(z)$ of form (1) we have

$$\liminf_{n\to\infty} \|p_n(z)\| \geqq \tau(E), \tag{7}$$

since the definition of $T_n(z)$ implies

$$\|T_n(z)\| \leqq \|p_n(z)\|.$$

Thus to prove that (6) implies (5) we need merely exhibit a sequence of polynomials $P_n(z)$ of form (4) for which

$$\limsup_{n\to\infty} \|P_n(z)\|^{1/n} \leqq \tau(E). \tag{8}$$

Inequality (8) follows from (6) if we set $P_n(z) \equiv T_n(z) - T_n(0) + A_n$, since we have by (3) for arbitrary $\varepsilon$ $(>0)$ and $n$ sufficiently large

$$\|T_n(z)\| \leqq [\tau(E)+\varepsilon]^n, \qquad |T_n(0)| \leqq [\tau(E)+\varepsilon]^n,$$
$$|A_n| \leqq [\tau(E)+\varepsilon]^n, \qquad \|P_n(z)\| \leqq 3[\tau(E)+\varepsilon]^n.$$

Theorem 1 is established.

To consider the analogue of Theorem 1 where now $E$ does not contain 0, we need to place some further restrictions on $E$ [compare 3]. If the complement $K$ (with respect to the extended plane) of $E$ is connected, and if $\tau(E)>0$, let $K_n$ be a monotonic increasing sequence of subregions of $K$, all containing $z=\infty$, and in their totality exhausting $K$. The sequence $G_n(z)$ of GREEN'S functions for the respective $K_n$ with pole at infinity is monotonic increasing in $K$, and throughout $K$ approaches the *generalized Green's function* $G(z)$ for $K$ with pole at infinity; the function $G(z)$ is harmonic in $K$ and is independent of the particular sequence $K_n$. Let $H(z)$ be conjugate to $G(z)$ in $K$. The function $w=\varphi(z) \equiv e^{G+iH}$ is analytic (although not necessarily single valued) in $K$, and maps $K$ onto the region $|w|>1$ so that $\varphi(\infty)=\infty$. We denote generically by $E_R$ the locus $G(z)=\log R$ $(>0)$ in $K$. The generalized Bernstein Lemma in extended form [2, § 4.9] asserts for an arbitrary polynomial of the form $q_n(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ the inequality

$$|q_n(z)| \leqq \|q_n(z)\| \cdot R^n, \qquad z \text{ on } E_R,$$

so the relation

$$\lim_{n\to\infty} \|q_n(z)\|^{1/n} = \tau(E)$$

implies

$$\limsup_{n\to\infty} |q_n(z)|^{1/n} \leqq R \cdot \tau(E), \qquad z \text{ on } E_R. \tag{9}$$

THEOREM 2. *Let $E$ be a closed bounded set with $\tau(E)>0$, whose complement is connected and contains* 0. *Set $|\varphi(0)|=R_0$. Let $F_n(z)$ be the (unique) polynomial of form* (4) *of least norm, where the $A_n$ are prescribed. Then a necessary and sufficient condition for* (5) *is*

$$\limsup_{n\to\infty} |A_n|^{1/n} \leqq R_0 \cdot \tau(E). \tag{10}$$

To consider $F_n(z)$ we note the equation

$$\begin{aligned}\|F_n(z)\| &= \|z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + A_n\| \\ &= \max\left[|z| \cdot \left|\frac{z^n + A_n}{z} + a_1 z^{n-2} + a_2 z^{n-3} + \cdots + a_{n-1}\right|, \quad z \text{ on } E\right];\end{aligned}$$

the problem of determining the polynomial $F_n(z)$ of least norm is equivalent to the problem of determining the polynomial $(a_1 z^{n-2}+\cdots+a_{n-1})$ of degree $n-2$ of best Tchebycheff approximation to the function $(z^n+A_n)/z$ on $E$ with continuous non-vanishing weight function $|z|$. Consequently $F_n(z)$ exists and is unique.

The necessity of (10) follows from (9) with $z=0$.

To prove the sufficiency of (10) we consider the space $S$ of all possible elements of the form $B$: $(B_1, B_2, B_3, \ldots)$, and the subspace $S_E$ consisting of all elements $A$: $(A_1, A_2, A_3, \ldots)$, each element with the property that there exists some sequence of polynomials $G_n(z)$ of form (4) satisfying

$$\limsup_{n\to\infty} \|G_n(z)\|^{1/n} \leqq \tau(E). \tag{11}$$

Inequality (11) implies the corresponding inequality for the polynomials of form (4) of least norm, which by (7) implies (5).

LEMMA I. $0$: $(0, 0, 0, \ldots) \in S_E$.

Here we need merely set $G_n(z) \equiv z\,T_{n-1}(z)$, whence $\|G_n(z)\| \leqq M \cdot \|T_{n-1}(z)\|$, where $M$ is a suitably chosen constant, and (11) follows from (3).

LEMMA II. *If* $A$: $(A_1, A_2, \ldots) \in S_E$, *then* $(\lambda_1 A_1, \lambda_2 A_2, \ldots) \in S_E$ *provided*

$$\limsup |\lambda_n|^{1/n} \leqq 1. \tag{12}$$

Let $F_n(z)$ of form (4) satisfy (5); we set $G_n(z) \equiv \lambda_n F_n(z) + (1-\lambda_n) z\,T_{n-1}(z)$. For given $\varepsilon$ $(>0)$ and $n$ sufficiently large we have by the proof of Lemma I

$$\begin{aligned}\|G_n(z)\| &\leqq \left(|\lambda_n| + 1 + |\lambda_n|\right)[\tau(E)+\varepsilon]^n \\ &\leqq 3(1+\varepsilon)^n [\tau(E)+\varepsilon]^n,\end{aligned}$$

which implies (11) and the Lemma.

It is a consequence of Lemma II that $A \in S_E$ when and only when $(|A_1|, |A_2|, |A_3|, \ldots) \in S_E$.

We are now in a position to complete the proof of Theorem 2, namely to prove the sufficiency of (10). There exists [3, Theorem 12] a sequence of

polynomials $p_n(z)$ of form (1) which satisfy

$$\lim_{n\to\infty} \|p_n(z)\|^{1/n} = \tau(E), \tag{13}$$

$$\lim_{n\to\infty} |p_n(z)|^{1/n} = \tau(E)\cdot|\varphi(z)|, \quad z \text{ in } K, \tag{14}$$

in the notation already introduced. In (14) we may set $z=0$:

$$\lim_{n\to\infty} |p_n(0)|^{1/n} = R_0\cdot\tau(E). \tag{15}$$

From (10) and (15) we write

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{A_n}{p_n(0)}\right|^{1/n} \leqq 1,$$

which is of form (12); but (13) implies $\{p_n(0)\}\in S_E$, and then Lemma II completes the proof of Theorem 2.

It is of some interest to note here that if the polynomials $G_n(z)$ of form (4) satisfy (11), they also satisfy (as in the proof of (9))

$$\limsup_{n\to\infty} [\max|G_n(z)|, \quad z \text{ on } E_R]^{1/n} \leqq R\cdot\tau(E);$$

the square bracket is the norm of $G_n(z)$ on the closure $E_R^0$ of the interiors of the Jordan curves composing $E_R$, while $R\cdot\tau(E)$ is the transfinite diameter of $E_R^0$. The same sequence $G_n(z)$ serves to demonstrate (5) both for the given $E$ and for all $E_R^0$, $1<R<R_0$.

We have hitherto restricted our treatment to the use of the Tchebycheff norm of form (2), but other useful norms also occur in the literature, such as the Tchebycheff norm with continuous non-vanishing weight function, and norms measured by line or surface integrals of $|p_n(z)|^p$, $p>0$, also with suitable weight functions. However, the relation (5) is known [3, Theorem 2] to be within a large class (quasi-Tchebycheff) of norms independent of the particular norm, so if (5) is valid for the extremal polynomials with norm (2), then (5) interpreted for any quasi-Tchebycheff norm is valid for these same polynomials, and as so interpreted is valid with that norm and the extremal polynomials for that norm. Conversely, (5) valid for any quasi-Tchebycheff norm and its extremal polynomials implies that (5) is valid for norm (2) and its extremal polynomials.

It is appropriate to add some remarks relative to the distribution of the zeros of the polynomials $F_n(z)$ of Theorem 2, and its influence on the asymptotic properties of the $F_n(z)$. Here the fundamental theorem is

THEOREM 3. *Let $E$ be a point set of positive transfinite diameter whose complement $K$ is a region containing the point at infinity, and let the polynomials $p_n(z)$ each be of form (1). If a subregion $D$ of $K$ contains no limit point of the zeros of the $p_n(z)$, the relation (13) implies (14) uniformly in any closed bounded subregion $D_1$ of $D$. If $D$ is simply connected, and if the $n$-th roots are suitably chosen, we have*

$$\lim_{n\to\infty} [p_n(z)]^{1/n} = \tau(E)\cdot\varphi(z), \tag{16}$$

*throughout $D$, uniformly on $D_1$.*

Theorem 3 applies equally well to the $p_n(z)$ and to any subsequence $p_{n_k}(z)$.

We omit the detailed proof of Theorem 3, which is similar to proofs [3, Theorem 11; 5, Corollary to Theorem 1] already in the literature. An example here is illuminating. Under the conditions of Theorem 2 (a similar remark applies to Theorem 1) we set $(n>20)$

$$\Phi_n(z) \equiv z^{10}(z-1)(z-2)\dots(z-10)\,F_{n-20}(z).$$

Then for suitably chosen constant $M$ we have

$$\|\Phi_n(z)\| \leqq M\,\|F_{n-20}(z)\|,$$

whence by (5) and (7)

$$\lim_{n\to\infty} \|\Phi_n(z)\|^{1/n} \leqq \tau(E). \tag{17}$$

This and similar examples show that (17) without some restriction on the zeros of the $\Phi_n(z)$ cannot be used either with or without Theorem 3 to deduce (14) or (16).

An obvious difficulty in the application of Theorem 3 is that one must often prove the boundedness of the zeros of the $p_n(z)$. The following remarks use previously established geometric results concerning arbitrary restricted infrapolynomials, so apply to extremal polynomials not merely with norm (2) but with an arbitrary monotonic [compare 3, § 1] and quasi-Tchebycheff norm.

1°. Under the conditions of Theorem 2, let $E$ be real with the convex hull $H$: $(0<)\ a\leqq z\leqq b$, and suppose $(-1)^n A_n>0$. Then [4, Theorem 5] all zeros of $F_n(z)$ except perhaps one lie on $H$ and that one lies in the interval

$$H_1\colon \frac{(-1)^n A_n}{b^{n-1}} \leqq z \leqq \frac{(-1)^n A_n}{a^{n-1}}; \tag{18}$$

if $H$ and $H_1$ are mutually disjoint, they contain respectively $n-1$ and 1 zeros of $F_n(z)$. If $|A_n|/a^{n-1}$ is bounded for all $n$, the zeros of $F_n(z)$ are bounded; by Theorem 3, equation (14) with $p_n(z)\equiv F_n(z)$ is valid except perhaps on the limit $(n\to\infty)$ of the set $H+H_1$. If for some subsequence $n_1, n_2, \dots$ we have $\limsup |A_{n_k}|^{1/n_k}<R_0\cdot\tau(E)$, then (14) is not valid for $z=0$, and the origin is a limit point and the only limit point exterior to $H$ of the zeros of the respective $F_{n_k}(z)$; here we may have $n_k=k$.

2°. Under the conditions of Theorem 2 let $E$ lie on the circumference $C$: $|z|=\varrho(>0)$, and suppose $|A_n|=\varrho^n$. Then [4, Theorem 11] all zeros of $F_n(z)$ lie on $C$. Consequently, by Theorem 3, equation (14) with $p_n(z)\equiv F_n(z)$ is valid except on $C$.

3°. Under the conditions of Theorem 2 let $E$ lie in the disc $\gamma$: $|z-\gamma_0|\leqq r$ not containing 0. Then [4, Theorem 9] if two zeros of $F_n(z)$ lie exterior to $\gamma$ they both lie in a disc $\gamma'$ intersecting $\gamma$ and subtending the same angle at 0 as does $\gamma$. If a zero of $F_n(z)$ lies exterior to the locus $\Gamma$ of all such discs $\gamma'$, all other zeros of $F_n(z)$ lie in $\gamma$. Suitable neighborhoods of both $z=0$ and $z=\infty$ lie exterior to $\Gamma$, so if a sequence of zeros of the respective $F_n(z)$ approaches

zero no such sequence becomes infinite; if such a sequence becomes infinite, no such sequence approaches zero. If among the zeros $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ of $F_n(z)$ all but $\alpha_n$ lie in $\gamma$, we have

$$(|\gamma_0| - r)^{n-1} \leqq |\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}| \leqq (\gamma_0 + r)^{n-1},$$

$$(\gamma_0 - r) \cdot |\alpha_n| \leqq |A_n| = |\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n| \leqq (\gamma_0 + r)^{n-1} \cdot |\alpha_n|,$$

$$\frac{|A_n|}{(|\gamma_0| + r)^{n-1}} \leqq |\alpha_n| \leqq \frac{|A_n|}{(|\gamma_0| - r)^{n-1}}. \tag{19}$$

If the last member of (19) is bounded, all zeros of the $F_n(z)$ are bounded and Theorem 3 applies; at an arbitrary point $z$ exterior to $E$ the equation

$$\lim_{n_k \to \infty} |F_{n_k}(z)|^{1/n_k} = \tau(E) \cdot |\varphi(z)|$$

continues to hold unless $z$ is a limit point of the zeros of a sequence of distinct functions $F_{n_k}(z)$. If we have

$$\limsup_{n_k \to \infty} |A_{n_k}|^{1/n_k} < R_0 \cdot \tau(E),$$

the origin is a limit point of zeros of the respective $F_{n_k}(z)$ and the only limit point exterior to $\Gamma$.

There is a relation between (10) and the restrictions on the $A_n$ made at the end of remarks 1° and 3°, namely the boundedness of the last members of (18) and (19); for we shall prove, with the notation already introduced,

THEOREM 4. *Let $E$ be a closed bounded set of positive transfinite diameter whose complement $K$ is connected. Let $z_0$ be any point of $K$, the smallest and the largest of whose distances to points of $E$ are respectively denoted by $d_0$ and $d_1$. Then we have*

$$d_0 \leqq \tau(E) \cdot |\varphi(z_0)| \leqq d_1. \tag{20}$$

*If $K$ is regular in the sense that the classical Green's function $G(z)$ exists for $K$ with pole at infinity, and if we have $d_0 < d_1$, then we have*

$$d_0 < \tau(E) \cdot |\varphi(z_0)| < d_1. \tag{21}$$

If the boundary $B$ of $E$ consists of a finite number of mutually exterior Jordan curves, it is known [for instance 2, §§ 4.2 and 4.3] that we have

$$G(z) + \log \tau(E) = \int_0^1 \log r \, du, \qquad z \text{ in } K, \tag{22}$$

where the integral is taken over $B$ and $du$ represents $1/2\pi$ times the differential on $B$ of the function conjugate to $G(z)$. Since we have $\int_B du = 1$, and since $du$ vanishes identically on no arc of $B$, inequalities (21) follow from (22), with $|\varphi(z)| = e^{G(z)}$. If $K$ is regular but not necessarily bounded by a finite number of mutually exterior Jordan curves, we consider a locus $B'$: $G(z) = \log R$ $(>0)$ in $K$ consisting of such curves. If $E'$ denotes the closed interiors

of the curves composing $B'$, we may replace (22) by the corresponding equation for $E'$ instead of $E$:

$$[G(z) - \log R] + \log[R \cdot \tau(E)] = \int_0^1 \log r \, du; \tag{23}$$

the integral is taken over $B'$, and the equation is valid for $z$ in the complement of $E'$. With $d_0 < d_1$, as $R$ approaches unity suitable arcs of $B'$ on which $\int du$ is constant but not zero vary with $R$ and have their end-points on fixed level loci of the conjugate of $G(z)$ in $K$, hence remain bounded from the circle $|z - z_0| = d_0$, so the first of inequalities (21) follows; the second of inequalities (21) follows similarly.

If $K$ is not assumed regular, let $\varepsilon$ $(>0)$ be arbitrary, and let $B_1$ be a lemniscate of transfinite diameter $\tau(E_1) < \tau(E) + \varepsilon$ whose closed interior $E_1$ covers $E$. If $z$ lies exterior to $B_1$, we have

$$G_1(z) + \log \tau(E_1) = \int_0^1 \log r \, du_1, \tag{24}$$

where the integral is taken over $B_1$, $G_1(z)$ is GREEN's function for the exterior $K_1$ of $B_1$ with pole at infinity, and $du_1$ is $1/2\,\pi$ times the differential of the function conjugate to $G_1(z)$ in $K_1$. If $\delta_0$ and $\delta_1$ denote the smallest and largest distances from $z_0$ (assumed in $K_1$) to $E_1$, we have by (24)

$$\delta_0 < \tau(E_1)\,|\varphi_1(z_0)| < \delta_1, \qquad |\varphi_1(z)| \equiv e^{G_1(z)}.$$

As $\varepsilon$ approaches zero, $\tau(E_1) \to \tau(E)$, $G_1(z) \to G(z)$ in $K$, $|\varphi_1(z_0)| \to |\varphi(z_0)|$, $\delta_0 \to d_0$, $\delta_1 \to d_1$, so (20) follows.

Theorem 4 is of special interest when $d_0 = d_1$; all points of $E$ lie on a circle whose center is $z_0$ and radius $d_0$; both signs in (20) become equality signs.

It cannot be asserted that (21) is valid if the condition of regularity of $K$ is omitted, but with $d_0 < d_1$. Counter-examples for the first and second inequalities in (21) are respectively: $E$ the right-hand half of the unit circumference plus the point $z = 2$; $E$ the right-hand half of the unit circumference plus the point $z = \frac{1}{2}$; in each case we choose $z_0 = 0$.

## References

[1] FEKETE, M., and J. L. WALSH: Asymptotic behavior of restricted extremal polynomials and of their zeros. Pac. J. Math. **7**, 1037–1064 (1957). — [2] WALSH, J. L.: Interpolation and Approximation, vol. 20. Colloquium Publications of the Amer. Math. Soc. 1935. — [3] FEKETE, M., and J. L. WALSH: On the asymptotic behavior of polynomials with extremal properties, and of their zeros. J. d'Analyse math. **4**, 49–87 (1954). — [4] WALSH, J. L.: On infrapolynomials with prescribed constant term. J. math. pures et appl. **37**, 297–316 (1958). — [5] WALSH, J. L.: Overconvergence, degree of convergence, and zeros of sequences of analytic functions. Duke Math. J. **13**, 195–234 (1946).

*Dept. of Math., Harvard University, Cambridge 38, Mass. (U.S.A.)*

*(Eingegangen am 16. Oktober 1959)*

JURKAT, W. B.
Math. Zeitschr. 73, 346–365 (1960)

# On the analytic structure of semi-groups of positive matrices

Dedicated to OSKAR PERRON on his 80-th anniversary

By

W. B. JURKAT[1])

**0. Introduction.** A matrix-function $P(t)=(p_{ij}(t))$ defines a *semi-group of positive matrices*, or briefly *semi-group*, if

$$0 \leqq P(t) < +\infty, \quad i.e. \quad 0 \leqq p_{ij}(t) < +\infty, \tag{0.1}$$

$$P(s+t) = P(s)\,P(t), \quad i.e. \quad p_{ij}(s+t) = \sum_m p_{im}(s)\,p_{mj}(t), \tag{0.2}$$

$$\lim_{t \to +0} P(t) = I = P(0), \quad i.e. \quad \lim_{t \to +0} p_{ij}(t) = \delta_{ij} = p_{ij}(0), \tag{0.3}$$

where the indices $i$, $j$, $m$ range over all non-negative integers, the parameters $s$, $t$ range over all positive real numbers, and $\delta_{ij}$ is the Kronecker symbol. In two previous papers [5], [6] these semi-groups were introduced and discussed as a generalization of *ordinary* or *regular Markov processes* satisfying respectively

$$\sum_m p_{im}(t) \leqq 1 \quad (\text{all } i, t>0), \tag{0.4}$$

$$\sum_m p_{im}(t) = 1 \quad (\text{all } i, t>0). \tag{0.5}$$

Omitting the conditions on row sums has two advantages apart from freeing results from unnecessary assumptions. First, the transposed matrix $P^*(t)$ also represents a semi-group so establishing a natural duality in all results. Secondly $P(t)$, considered as right or left hand operator, is not restricted to any particular sequence space nor to be a bounded operator. For parts of the theory it is convenient, however, to consider only semi-groups satisfying[2])

$$\hat{p}_{ij}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,p_{ij}(t)\,dt < +\infty \quad (\text{all } i, j, \lambda>0), \tag{0.6}$$

for which we reserve the name *generalized Markov processes* in this paper.

[1]) This research was supported by the United States Air Force Office of Scientific Research under contract No. AF 49(638)-265.

[2]) In general we denote by $\hat{f}(\lambda)$ the Laplace transform of $f(t)$.

Our starting point was the result of CHUNG [1], [2] (*cf.* also his forthcoming monograph [3]) that there exist functions $f_{ik}(t) \geqq 0$ such that

$$(0.7) \qquad p_{ik}(t) = f_{ik} * p_{kk} = \int_0^t f_{ik}(s)\, p_{kk}(t-s)\, ds \quad (i \neq k,\ t > 0),$$

in case $P(t)$ is a regular Markov process. By noticing that this result generalizes to our semi-groups we obtain at the same time its dual $p_{kj} = p_{kk} * g_{kj}$ with functions $g_{kj}(t) \geqq 0$ $(j \neq k)$. The dual formulae turn out to be a powerful tool in discussing the analytic behavior of $P(t)$. In fact, in § 3 we base on them an alternative proof of ORNSTEIN's recent result [10] that all $p_{ij}(t)$ have a continuous first derivative for $t > 0$.

Given a regular Markov process $(p_{ij}(t))$ and an index $k$ CHUNG [2] defined an ordinary Markov process $({}_k p_{ij}(t))$ by taking ${}_k p_{ij}(t)$ to be the transition probability from $i$ to $j$ in time $t$ under the taboo $k$ $(i \neq k,\ j \neq k)$. It is possible to define such a semi-group without a $k$-th column or row also in the general case and to relate the functions $f_{ik}$ and $g_{kj}$ to it. A thorough study of these relations leads to a complete system of formulae in the sense that it characterizes the quantities involved (§§ 2, 4). The driving force in these investigations is the desire to find construction principles which, starting from simple and well understood elements, lead up to the most general semi-groups thus revealing their structure and analytic behavior. In this spirit $({}_k p_{ij}(t))$ should be considered a simpler semi-group, and the problem of reconstructing the most general $(p_{ij}(t))$ is completely solved for generalized Markov processes in §§ 5, 6. Further structure problems and references are mentioned in § 7.

Most of our results find their origin in the following consequence of the semi-group property (0.2). For $0 < nh \leqq t$, $n \geqq 1$

$$(0.8) \quad P(t) = P_{mk}(h)\, P(t-h) + \sum_{\nu=2}^{n} {}_{mk}P(h)^{\nu-1} P_{mk}(h)\, P(t-\nu h) + {}_{mk}P(h)^n\, P(t-nh),$$

where ${}_{mk}P(t)$ denotes the matrix obtained from $P(t)$ by replacing the element $p_{mk}(t)$ by zero, and $P_{mk}(t)$ its supplement: $P(t) = P_{mk}(t) + {}_{mk}P(t)$. In (0.8) the influence of $p_{mk}(t)$ is isolated in a certain sense. Identities of this type have been used by KOLMOGOROV [9] for $m \neq k$ to establish derivatives at $t = 0$ and by ORNSTEIN [10] for $m = k$ to establish derivatives for $t > 0$. Discrete formulae in general will be discussed in § 1.

The author is indebted to K. L. CHUNG for several valuable suggestions.

**1. Discrete formulae.** We shall list here a number of identities following from the basic matrix equation (0.8) with $t = nh$, $m = k$. Formulae with $m \neq k$ are of less importance to us and will not be discussed. Proofs are of simple algebraic nature and need only be indicated.

Fix $k$ and denote the matrix elements of ${}_{kk}P(h)^n$ by ${}_k p_{ij}^{(n)}(h)$. Equation (0.8) includes for $n \geqq 1$, $h > 0$

$$(1.1) \quad p_{ij}(nh) = \delta_{ik} p_{kk}(h)\, p_{kj}(nh-h) + p_{kk}(h) \sum_{\nu=2}^{n} {}_k p_{ik}^{(\nu-1)}(h)\, p_{kj}(nh-\nu h) + {}_k p_{ij}^{(n)}(h)$$

with the general convention that empty sums equal zero. The dual to (1.1), *i.e.* the corresponding formula for the transposed matrix $P^*(t)$, reads

$$(1.2)\quad p_{ji}(nh) = \delta_{ik}\, p_{kk}(h)\, p_{jk}(nh-h) + p_{kk}(h) \sum_{\nu=2}^{n} {}_k p_{ki}^{(\nu-1)}(h)\, p_{jk}(nh-\nu h) + {}_k p_{ji}^{(n)}(h).$$

Summing (1.1) with $i=j=k$ for $n=1, \ldots, N$ and putting

$$(1.3)\qquad d_k^{(n)}(h) = 1 - p_{kk}(h) - p_{kk}(h) \sum_{\nu=2}^{n} {}_k p_{kk}^{(\nu-1)}(h)$$

leads in an elementary way to

$$(1.4)\quad 1 - p_{kk}(h)\, p_{kk}(Nh) = p_{kk}(h) \sum_{n=1}^{N} d_k^{(n)}(h)\, p_{kk}(Nh - nh) + d_k^{(N+1)}(h).$$

Furthermore, as an immediate consequence of the definition,

$$(1.5)\qquad {}_k p_{ij}^{(\nu+\mu)}(h) = \sum_{m}{}' {}_k p_{im}^{(\nu)}(h)\, {}_k p_{mj}^{(\mu)}(h) + {}_k p_{ik}^{(\nu)}(h)\, {}_k p_{kj}^{(\mu)}(h),$$

where the prime indicates a summation over indices $\neq k$ only. For $t \geqq 0$, $s \geqq 0$ let

$$(1.6)\qquad F_{ik}^{(h)}(t) = \sum_{2 \leqq \nu \leqq t/h} {}_k p_{ik}^{(\nu-1)}(h),$$

$$(1.7)\qquad G_{kj}^{(h)}(s) = \sum_{2 \leqq \mu \leqq s/h} {}_k p_{kj}^{(\mu-1)}(h),$$

$$1.8)\qquad D_k^{(h)}(t) = \sum_{1 \leqq n \leqq t/h} d_k^{(n)}(h).$$

Elementary matrix algebra shows for $t \geqq h$, $s \geqq h$, $\mu \geqq 1$, $\nu \geqq 1$

$$(1.9)\quad F_{ik}^{(h)}(t+\mu h) - F_{ik}^{(h)}(\mu h) = \sum_{j}{}' {}_k p_{ij}^{(\mu)}(h)\, F_{jk}^{(h)}(t) + {}_k p_{ik}^{(\mu)}(h)\, \big(1 + F_{kk}^{(h)}(t)\big),$$

$$(1.10)\quad G_{kj}^{(h)}(s+\nu h) - G_{kj}^{(h)}(\nu h) = \sum_{i}{}' G_{ki}^{(h)}(s)\, {}_k p_{ij}^{(\nu)}(h) + \big(1 + G_{kk}^{(h)}(s)\big)\, {}_k p_{kj}^{(\nu)}(h),$$

$$(1.11)\quad \begin{cases} D_k^{(h)}(\mu h) + D_k^{(h)}(\nu h) - D_k^{(h)}(\mu h + \nu h) \\ \qquad = p_{kk}(h) \sum_{j} G_{kj}^{(h)}(\mu h)\, F_{jk}^{(h)}(\nu h) + p_{kk}(h)\, F_{kk}^{(h)}(\mu h + \nu h). \end{cases}$$

From (1.1) and (1.2) we infer the inequalities

$$(1.12)\qquad 0 \leqq {}_k p_{ij}^{(n)}(h) \leqq p_{ij}(nh),$$

$$(1.13)\qquad {}_k p_{kj}^{(n)}(h) \leqq p_{kj}(nh) - p_{kk}(h)\, p_{kj}(nh-h),$$

$$(1.14)\qquad {}_k p_{jk}^{(n)}(h) \leqq p_{jk}(nh) - p_{kk}(h)\, p_{jk}(nh-h).$$

Since $p_{kk}(t)$ is bounded away from zero for $0 \leqq t \leqq T$ we obtain from (1.1) and (1.2) with some $\delta = \delta_k(T) > 0$

$$(1.15)\qquad p_{ik}(nh) \geqq \delta\, F_{ik}^{(h)}(nh) \qquad (nh \leqq T),$$

$$(1.16)\qquad p_{ki}(nh) \geqq \delta\, G_{ki}^{(h)}(nh) \qquad (nh \leqq T),$$

$$(1.17)\qquad p_{kk}(nh) - p_{kk}(h)\, p_{kk}(nh-h) \geqq \delta\, F_{kk}^{(h)}(nh) \qquad (nh \leqq T).$$

Since $p_{kk}(t)$ is also bounded from above for $0 \leqq t \leqq T$ we infer from (1.4) and (1.17) that $\sum_{n=1}^{N} d_k^{(n)}(h)\, p_{kk}(Nh - nh)$ is bounded for $Nh \leqq T$. But $d_k^{(n)}(h)$ is non-increasing with $n$ and therefore changes sign at most once. So it is possible to estimate $\sum d_k^{(n)}(h)$, where the summation is at first extended over terms $\geqq 0$ only, and later over terms $\leqq 0$ only. Altogether with some $\Delta = \Delta(T) < +\infty$

$$\sum_{n=1}^{N} |d_k^{(n)}(h)| \leqq \Delta \qquad (Nh \leqq T). \tag{1.18}$$

This estimate and a formula similar to (1.4) is due to ORNSTEIN [*10*]. Discrete formulae, similar but not identical with those treated here, are discussed in CHUNG [*3*, part I].

**2. Continuous analogues.** We shall now consider the limiting form of our discrete formulae when $h \to +0$. Our arguments are based on HELLY's theorem on compact sequences of functions of bounded variation. Part of the results can be obtained much simpler when $P(t)$ is an ordinary or regular Markov process.

The inequalities (1.15), (1.16), (1.18) imply that for fixed $i, j, T$ the functions $F_{ik}^{(h)}(t)$, $G_{kj}^{(h)}(t)$, $D_k^{(h)}(t)$ and their variations over $0 \leqq t \leqq T$ remain bounded as $h \to +0$. Hence, by HELLY's theorem, there exists a sequence of values $h \to +0$ such that for $0 \leqq t \leqq T$

$$F_{ik}^{(h)}(t) \to F_{ik}(t), \tag{2.1}$$

$$G_{kj}^{(h)}(t) \to G_{kj}(t), \tag{2.2}$$

$$D_k^{(h)}(t) \to D_k(t), \tag{2.3}$$

where $F_{ik}(t)$, $G_{kj}(t)$, $D_k(t)$ are of bounded variation in $0 \leqq t \leqq T$. By the diagonal process it is even possible to choose one sequence of $h$'s which can be used for all $i, j, T$, and $h$ will be restricted to this sequence from now on. Actually $F_{ik}(t)$, $G_{kj}(t)$ will be non-decreasing and $F_{ik}(0) = G_{kj}(0) = D_k(0) = 0$. From (1.13), (1.14), (1.17) and the continuity of $P(t)$ we infer

$$ {}_k p_{kj}^{(n)}(h) \to 0, \quad {}_k p_{jk}^{(n)}(h) \to 0, \quad F_{kk}^{(h)}(nh) \to 0, \quad d_k^{(n)}(h) \to 0 \tag{2.4}$$

if $nh$ remains bounded as $h \to +0$. We now write (1.1) in the form

$$p_{ij}(nh) = \delta_{ik}\, p_{kk}(h)\, p_{kj}(nh - h) + p_{kk}(h) \int_0^{nh} p_{kj}(nh - s)\, dF_{ik}^{(h)}(s) + {}_k p_{ij}^{(n)}(h)$$

and choose $n = n(h)$ such that $n - t/h$ is bounded for fixed $t > 0$. Since $F_{ik}^{(h)}(t) - F_{ik}^{(h)}(nh) \to 0$ by (2.4) it follows that the integral converges as $h \to +0$ and hence

$$ {}_k p_{ij}^{(n)}(h) \to {}_k p_{ij}(t) \qquad (t > 0), \tag{2.5}$$

$$p_{ij}(t) = \delta_{ik}\, p_{kj}(t) + \int_0^t p_{kj}(t - s)\, dF_{ik}(s) + {}_k p_{ij}(t).$$

Since (2.4) implies

$$(2.6) \qquad {}_k p_{kj}(t) = 0, \quad {}_k p_{jk}(t) = 0, \quad F_{kk}(t) = 0 \qquad (t > 0),$$

we have

$$(2.7) \qquad p_{ik}(t) = \int_0^t p_{kk}(t-s)\, dF_{ik}(s) \qquad (i \neq k,\ t > 0),$$

$$(2.8) \qquad p_{ij}(t) = {}_k p_{ij}(t) + \int_0^t p_{kj}(t-s)\, dF_{ik}(s) \qquad (i \neq k,\ j \neq k,\ t > 0).$$

In the same way (1.2) and (1.4) lead to

$$(2.9) \qquad p_{ki}(t) = \int_0^t p_{kk}(t-s)\, dG_{ki}(s) \qquad (i \neq k,\ t > 0),$$

$$(2.10) \qquad p_{ji}(t) = {}_k p_{ji}(t) + \int_0^t p_{jk}(t-s)\, dG_{ki}(s) \qquad (i \neq k,\ j \neq k,\ t > 0),$$

$$(2.11) \qquad 1 - p_{kk}(t) = \int_0^t p_{kk}(t-s)\, dD_k(s) \qquad (t > 0).$$

We notice that the series in

$$\sum_m p_{im}(t)\, p_{mj}(s) = p_{ij}(t+s)$$

converges uniformly for $0 \leqq s \leqq T$, $0 \leqq t \leqq T$ and fixed $i, j, T$ by DINI's theorem. Let us fix $s > 0$, $t > 0$ and choose $\mu, \nu$ such that $\mu h \leqq s < (\mu+1)h$, $\nu h \leqq t < (\nu+1)h$. Because of (1.12) the series in (1.5) converges uniformly with respect to $h$, and we obtain in the limit

$$(2.12) \qquad {}_k p_{ij}(t+s) = \sum_m{}' {}_k p_{im}(t)\, {}_k p_{mj}(s) \qquad (s > 0,\ t > 0).$$

Using (1.12), (1.15), (1.16) one sees that the same reasoning applies to (1.9), (1.10), (1.11) and gives by (2.1), (2.2), (2.3), (2.4)

$$(2.13) \qquad F_{ik}(t+s) - F_{ik}(s) = \sum_j{}' {}_k p_{ij}(s)\, F_{jk}(t) \qquad (t > 0,\ s > 0),$$

$$(2.14) \qquad G_{kj}(s+t) - G_{kj}(t) = \sum_i{}' G_{ki}(s)\, {}_k p_{ij}(t) \qquad (s > 0,\ t > 0),$$

$$(2.15) \qquad D_k(s) + D_k(t) - D_k(s+t) = \sum_j{}' G_{kj}(s)\, F_{jk}(t) \qquad (s > 0,\ t > 0).$$

Furthermore (1.12), (1.15), (1.16) imply

$$(2.16) \qquad 0 \leqq {}_k p_{ij}(t) \leqq p_{ij}(t) \qquad (t > 0),$$

$$(2.17) \qquad p_{ik}(t) \geqq \delta F_{ik}(t), \quad p_{ki}(t) \geqq \delta G_{ki}(t) \qquad (0 < t \leqq T),$$

where $\delta = \delta_k(T) > 0$ is independent of $i$ and $t$.

We shall mention some consequences of these formulae. From (2.8) we obtain

$$(2.18) \qquad {}_k p_{ij}(t) \to \delta_{ij} \quad \text{as} \quad t \to +0 \qquad (i \neq k,\ j \neq k).$$

Thus $\left({}_k p_{ij}(t)\right)$ with $i \neq k$, $j \neq k$ forms a semi-group in our sense, in particular all ${}_k p_{ij}(t)$ are continuous. From (2.7) follows that

$$F_{ik}(t) \to 0 = F_{ik}(0) \quad \text{as} \quad t \to +0 \qquad (i \neq k). \tag{2.19}$$

As before, the uniform convergence of the series in (2.13) gives

$$F_{ik}(s+t) - F_{ik}(s) \to 0 \quad \text{as} \quad t \to +0 \qquad (i \neq k,\ s > 0), \tag{2.20}$$

even uniformly for $0 < s \leqq T$ and fixed $i$, $T$. Hence all $F_{ik}(t)$ are continuous, and similarly so all $G_{kj}(t)$. Putting[3])

$$P_{ij}(t) = \int_0^t p_{ij}(s)\, ds \qquad (t \geqq 0) \tag{2.21}$$

and integrating (2.7) yields

$$P_{ik}(t) = \int_0^t p_{kk}(t-s)\, F_{ik}(s)\, ds \qquad (i \neq k,\ t \geqq 0). \tag{2.22}$$

According to TITCHMARSH [12, p. 327] this equation determines $F_{ik}(s)$ uniquely, which in turn shows that (2.1) holds for arbitrary choice of $h \to +0$. Corresponding statements are true for $G_{ki}(s)$ as well. Furthermore (2.8) now determines ${}_k p_{ij}(t)$ uniquely, and $h$ may therefore be arbitrary in (2.5) also. From (2.11) and (2.15) we obtain

$$D_k(t) \to 0 = D_k(0) \quad \text{as} \quad t \to +0, \tag{2.23}$$

$$D_k(2s) + D_k(2t) - 2D_k(s+t) = \sum_j{}' \left(G_{kj}(s) - G_{kj}(t)\right)\left(F_{jk}(t) - F_{jk}(s)\right) \leqq 0 \tag{2.24}$$

for $s > 0$, $t > 0$. Thus $D_k(t)$ is continuous and concave for $t \geqq 0$ and therefore of the form

$$D_k(t) = \int_0^t d_k(s)\, ds \qquad (t \geqq 0), \tag{2.25}$$

where $d_k(s)$ is (finite) non-increasing for $s > 0$ and integrable into zero. As before, it becomes apparent that (2.11) determines $D_k(s)$ uniquely and that $h$ may be arbitrary in (2.3).

In case of a regular Markov process $P(t)$ the quantities $F_{ik}(t)$, ${}_k p_{ij}(t)$ and the relating formulae have been introduced by K. L. CHUNG [1], [2] using probabilistic arguments. Analytic arguments are implicit in CHUNG [3, part II, §§ 13, 15]. Summing (2.8) over $j$ and using (2.7) we find

$$F_{ik}(t) = 1 - \sum_j{}' {}_k p_{ij}(t) \qquad (i \neq k,\ t > 0). \tag{2.26}$$

The dual formulae involving $G_{kj}(t)$ can partly be obtained by the duality principle of FELLER [4]. However our direct proof (not using row sums) gives more complete and better information. Summing (2.9) and the uniqueness lead to

$$D_k(s) = \sum_i{}' G_{ki}(s) \qquad (s \geqq 0). \tag{2.27}$$

[3]) Contrary to the notation introduced in § 0 which will not be used again.

Thus one obtains a simpler proof of the central formula (2.11) for regular processes. Ordinary Markov processes can be dealt with by first adjoining one more row and column as to make the process regular.

We summarize the more important results as follows.

**Theorem 1.** *With a semi-group* $(p_{ij}(t))$ *and an index* $k$ *there are uniquely associated a semi-group* $({}_kp_{ij}(t))$ *which does not contain the index* $k$, *continuous and non-decreasing functions* $F_{ik}(t)$, $G_{kj}(t)$, *and a continuous and concave function* $D_k(t)$, *which are related to each other according to the formulae* (2.7), (2.8), (2.9), (2.10), (2.11) *and* (2.13), (2.14), (2.15). *In case of a regular Markov process we have* (2.26), (2.27) *additionally.*

**3. Differentiability.** Generalizing results of DOOB, KOLMOGOROV, and KENDALL it was shown in [5] that $p'_{ij}(0)=q_{ij}$ exists, $-\infty\leqq q_{ii}<+\infty$, $0\leqq q_{ij}<+\infty$ $(i\neq j)$. Improving results and techniques of AUSTIN and CHUNG the existence and properties of $p'_{ik}(t)$, $p'_{kj}(t)$ were derived in [5] from the assumption $q_{kk}>-\infty$. Recently ORNSTEIN [10] made the discovery that this assumption is superfluous for regular Markov processes, thus solving a problem of KOLMOGOROV. It will now be shown that formula (2.11) already implies the central result that $p_{kk}(t)$ is absolutely continuous. Further simplified technique then rapidly completes the results which are true for semi-groups in general.

Using (2.25) formula (2.11) reads

$$1-p_{kk}(t)=\int_0^t p_{kk}(t-s)\,d_k(s)\,ds \qquad (t\geqq 0), \tag{3.1}$$

which represents a Volterra equation for $p_{kk}$ and can be solved by iteration for $0\leqq t\leqq t_k$, $t_k>0$, provided that

$$\int_0^{t_k}|d_k(s)|\,ds<1. \tag{3.2}$$

Let us choose $t_k$ small enough as to insure (3.2) and define an integrable function $d_k^*(t)$ by

$$d_k^*(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}d_k^{n*}(t) \qquad (0<t\leqq t_k), \tag{3.3}$$

where $d_k^{n*}$ denotes the $n$-fold convolution of $d_k$ with itself. The $L$-convergence of the series in (3.3) is insured by (3.2), and the standard iteration argument gives

$$p_{kk}(t)=1-\int_0^t d_k^*(s)\,ds \qquad (0\leqq t\leqq t_k). \tag{3.4}$$

Thus $p_{kk}(t)$ is absolutely continuous for $0\leqq t\leqq t_k$. From (2.7) we infer by partial integration

$$p_{ik}(t)=F_{ik}(t)+\int_0^t p'_{kk}(s)\,F_{ik}(t-s)\,ds \qquad (i\neq k,\ 0\leqq t\leqq t_k), \tag{3.5}$$

and hence using (2.17)

$$\operatorname*{var}_{0\leqq s\leqq t}p_{ik}(s)\leqq F_{ik}(t)+\int_0^t|p'_{kk}(s)|\,F_{ik}(t-s)\,ds\leqq V_k\cdot p_{ik}(t) \quad (i\neq k,\ 0\leqq t\leqq t_k), \tag{3.6}$$

where $V_k$ denotes a finite constant independent of $t$ and $i$. Dual to (3.6) we obtain

$$\operatorname*{var}_{0\leq s\leq t} p_{ki}(s) \leq V_k \cdot p_{ki}(t) \qquad (i \neq k,\ 0 \leq t \leq t_k) \tag{3.7}$$

with same constants if they are chosen large enough. This way we even have (trivially)

$$\operatorname*{var}_{0\leq s\leq t} p_{kk}(s) \leq V_k \cdot p_{kk}(t) \qquad (0 \leq t \leq t_k). \tag{3.8}$$

Using the semi-group property these inequalities generalize to

$$\operatorname*{var}_{0\leq s\leq t} p_{ik}(r+s) \leq V_k\, p_{ik}(r+t) \qquad (r \geq 0,\ 0 \leq t \leq t_k), \tag{3.9}$$

$$\operatorname*{var}_{0\leq s\leq t} p_{kj}(r+s) \leq V_k\, p_{kj}(r+t) \qquad (r \geq 0,\ 0 \leq t \leq t_k). \tag{3.10}$$

Since $k$ was arbitrary and the variation over finite intervals can be written as sum of those over small intervals we get the following

**Lemma 1.** *For all $i, j$ and $s', t' > 0$*

$$\sum_m \operatorname*{var}_{0\leq s\leq s'} p_{im}(s) \cdot \operatorname*{var}_{0\leq t\leq t'} p_{mj}(t) < +\infty. \tag{3.11}$$

What follows is based upon a simple combination of the theorems of FUBINI and DINI:

**Lemma 2.** *If $\sum_m \operatorname{var}_{a\leq x\leq b} \varphi_m(x) < +\infty$ holds then*

$$\sum_m \left| h^{-1}\{\varphi_m(x+h) - \varphi_m(x)\} - \varphi'_m(x)\right| \to 0 \qquad (0 \neq h \to 0)$$

*for almost all $x \in [a, b]$.*

Now fix $i, j, s', t'$ in Lemma 1 and consider $\varphi_m(x) = \max_{0\leq s\leq s'} p_{im}(s) \cdot p_{mj}(x)$. Then for almost all $x \in [0, t']$, and this includes arbitrarily small values of $x$,

$$\sum_m \max_{0\leq s\leq s'} p_{im}(s) \left| h^{-1}\{p_{mj}(x+h) - p_{mj}(x)\} - p'_{mj}(x)\right| \to 0 \qquad (0 \neq h \to 0),$$

in particular

$$h^{-1}\{p_{ij}(s+x+h) - p_{ij}(s+x)\} \to \sum_m p_{im}(s)\, p'_{mj}(x) \qquad (0 \neq h \to 0)$$

uniformly for $0 \leq s \leq s'$, the series being absolutely convergent. Hence $p'_{ij}(r)$ exists and is continuous for all $i, j$ and $r > 0$, furthermore for all $i, j$, $s > 0$ and almost all $x > 0$

$$p'_{ij}(s+x) = \sum_m p_{im}(s)\, p'_{mj}(x).$$

But this implies for $t > 0$ with $x < t$

$$\begin{aligned}\sum_m p_{im}(s)\, p'_{mj}(t) &= \sum_m p_{im}(s) \sum_n p_{mn}(t-x)\, p'_{nj}(x) \\ &= \sum_n \sum_m p_{im}(s)\, p_{mn}(t-x)\, p'_{nj}(x) \\ &= \sum_n p_{in}(s+t-x)\, p'_{nj}(x) = p'_{ij}(s+t),\end{aligned}$$

where the interchange of summation is justified by the absolute convergence of the last series. By duality we have altogether

$$p'_{ij}(s+t) = \sum_m p_{im}(s)\, p'_{mj}(t) = \sum_m p'_{im}(s)\, p_{mj}(t) \qquad (s, t > 0), \tag{3.12}$$

the series being absolutely convergent[4]). Since $p_{ij}(t)$ is continuous for $t \geqq 0$ and $p'_{ij}(t)$ is continuous for $t > 0$ we conclude

$$\operatorname*{var}_{0 \leq s \leq t} p_{ij}(s) = \int_0^t |p'_{ij}(s)|\, ds < +\infty \qquad (t \geqq 0), \tag{3.13}$$

$$p_{ij}(t) = p_{ij}(0) + \int_0^t p'_{ij}(s)\, ds \qquad (t \geqq 0). \tag{3.14}$$

From Lemma 1 we now infer for all $i, j, s' > 0$ and almost all $t > 0$

$$\sum_m \int_0^{s'} |p'_{im}(s)|\, ds \cdot |p'_{mj}(t)| < +\infty,$$

and hence

$$p'_{ij}(s'+t) - p'_{ij}(t) = \sum_m \int_0^{s'} p'_{im}(s)\, ds \cdot p'_{mj}(t)$$

$$= \int_0^{s'} \sum_m p'_{im}(s)\, p'_{mj}(t),$$

$$p''_{ij}(s+t) = \sum_m p'_{im}(s)\, p'_{mj}(t) \qquad \text{(almost all pairs } s, t > 0), \tag{3.15}$$

the series being absolutely convergent. Furthermore $p'_{ij}(\tau)$ is absolutely continuous for $\tau > 0$.

To show that $p'_{ij}(t)$ with $i \neq j$ is continuous at $t = 0$ we use $p_{ij}(t) = q_{ij} t + o(t)$ as $t \to +0$ in the following estimations:

$$\sum_{m \neq i,j} \frac{1}{t} \int_0^t |p'_{im}(s)\, p_{mj}(t-s)|\, ds \leqq \sum_{m \neq i,j} \frac{1}{t} \operatorname*{var}_{0 \leq s \leq t} p_{im}(s) \cdot \operatorname*{var}_{0 \leq s \leq t} p_{mj}(s)$$

$$= O\left(\frac{1}{t}\right) \sum_{m \neq i,j} p_{im}(t)\, p_{mj}(t) = O\left(\frac{1}{t}\right) \{p_{ij}(2t) - (p_{ii}(t) + p_{jj}(t))\, p_{ij}(t)\}$$

$$= O\left(\frac{1}{t}\right) \{2 q_{ij} t + o(t) - 2 q_{ij} t\} = o(1) \qquad (t \to +0),$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t \{p'_{ij}(t) - p'_{ii}(s)\, p_{ij}(t-s) - p'_{ij}(s)\, p_{jj}(t-s)\}\, ds = o(1),$$

$$p'_{ij}(t) + O\left(\frac{1}{t}\right) \operatorname*{var}_{0 \leq s \leq t} p_{ii}(s) \cdot p_{ij}(t) - \frac{1}{t} p_{ij}(t) + o\left(\frac{1}{t}\right) \operatorname*{var}_{0 \leq s \leq t} p_{ij}(s) = o(1),$$

$$p'_{ij}(t) - \frac{1}{t} p_{ij}(t) = o(1) \qquad (i \neq j,\ t \to +0). \tag{3.16}$$

[4]) This was also obtained by K. L. CHUNG for regular processes using an inequality like (3.6).

In the same way we obtain for $i=j$ as $t\to+0$

$$(3.17)\quad p'_{ii}(t)-\frac{1}{t}\left(p_{ii}(t)-1\right)=O\left(\frac{1}{t}\right)\left(p_{ii}(2t)-p_{ii}(t)^2\right)+O\left(\frac{1}{t}\right)\left(\operatorname*{var}_{0\le s\le t}p_{ii}(s)\right)^2,$$

but there seems to be no way of controlling the first term of the right hand side if $q_{ii}=-\infty$.

We summarize some of the results as follows.

**Theorem 2.** *For every semi-group the derivatives $p'_{ij}(t)$ are absolutely continuous for $t>0$ and satisfy the differential equations* (3.12), (3.15). *Moreover $p'_{ij}(t)$ is continuous at $t=0$ for $i\neq j$, while $p_{ii}(t)$ is at least absolutely continuous for $t\geqq 0$.*

It should be pointed out that a shorter proof of Theorem 2 can be based on the more easily available formulae (2.7). Multiplying (2.7) by $\int_0^h p_{ki}(s)\,ds=P_{ki}(h)$, $h>0$ fixed, and adding over $i\neq k$ gives for $t>0$

$$(3.18)\quad P_{kk}(t+h)-P_{kk}(t)=P_{kk}(h)\,p_{kk}(t)+\int_0^t p_{kk}(t-s)\,d_s\Big(\sum_{i\neq k}P_{ki}(h)\,F_{ik}(s)\Big),$$

an integral equation for $p_{kk}(t)$ which may well replace (2.11), particularly for small $h$. There are discrete analogues of (3.18) which shorten corresponding discrete proofs. But from the systematic point of view (2.11) is, of course, the central formula.

**4. Further properties.** Our formulae clearly make properties of the semi-group dependent upon those of the functions $F_{ik}$, $G_{kj}$, $D_k$. In fact, the results of § 3 are closely connected to differentiation properties of these functions, and it is possible to translate the results back and forth. But somehow our relations keep the functions $F_{ik}$, $G_{kj}$, $D_k$ under better control and allow us to determine them completely under additional assumptions.

To discuss the properties of $F_{ik}$, $G_{kj}$ we consider functions $W_i(t)$ satisfying

$$(4.1)\qquad 0\leqq W_i(t)<+\infty,\qquad W_i(s+t)-W_i(s)=\sum_m p_{im}(s)\,W_m(t)$$

for all $i$ and $s,t>0$. Obviously $W_i$ is non-decreasing, and $\varphi_m(x)=\max_{0\le s\le s'}p_{im}(s)\cdot W_m(x)$ satisfies the hypothesis of Lemma 2 for fixed $i$, $s'$, $t'>0$, and $x\in[0,t']$. As in § 3 we conclude that $W'_i(r)=w_i(r)\geqq 0$ exists, is continuous for $r>0$, and that

$$(4.2)\qquad w_i(s+t)=\sum_m p_{im}(s)\,w_m(t)$$

holds for $s>0$ and almost all $t=x>0$; but using the semi-group property (4.2) follows even for all $t>0$. According to [5, Theorem 2] also the limits $w_i(+0)$ exist as finite numbers. Completing the analogy to § 3 we notice that $\sum_m\int_0^{s'}|p'_{im}(s)|\,ds\cdot w_m(t)<+\infty$ which, as before, implies that $w_i(r)$ is

absolutely continuous for $r>0$, and that

$$w_i'(s+t)=\sum_m p_{im}'(s)\,w_m(t) \tag{4.3}$$

holds for almost all pairs $s, t>0$, the series being absolutely convergent. We collect the results into

**Lemma 3.** *If functions $W_i$ satisfy* (4.1) *then all $W_i'(t)=w_i(t)\geqq 0$ are absolutely continuous for $t>0$ with finite limits $w_i(+0)$. Furthermore* (4.2), (4.3) *hold as specified.*

It goes without saying that there is a dual form of Lemma 3 also. Application of Lemma 3 to $F_{ik}$, $i\neq k$, and the semi-group $({}_kp_{ij}(t))$ yields that all $F_{ik}'(t)=f_{ik}(t)\geqq 0$ are absolutely continuous for $t>0$ with finite limits $f_{ik}(+0)$, and that

$$f_{ik}(s+t)=\sum_j{}' {}_kp_{ij}(s)\,f_{jk}(t) \qquad (i\neq k,\ s,\ t>0). \tag{4.4}$$

Dually all $G_{kj}'(t)=g_{kj}(t)\geqq 0$, $j\neq k$, are absolutely continuous for $t>0$ with finite limits $g_{kj}(+0)$, and

$$g_{kj}(s+t)=\sum_i{}' g_{ki}(s)\,{}_kp_{ij}(t) \qquad (j\neq k,\ s,\ t>0). \tag{4.5}$$

Hence we have for $i\neq k$, $t\geqq 0$

$$F_{ik}(t)=\int_0^t f_{ik}(s)\,ds, \qquad G_{ki}(t)=\int_0^t g_{ki}(s)\,ds, \tag{4.6}$$

and in conjunction with (2.7) or (3.5)

$$p_{ik}'(t)=f_{ik}(t)+\int_0^t p_{kk}'(s)\,f_{ik}(t-s)\,ds \qquad (i\neq k,\ t>0). \tag{4.7}$$

Letting $t\to+0$ this leads to another proof that $p_{ik}'(t)$, $i\neq k$, is finite and continuous at $t=0$; also $f_{ik}(+0)=q_{jk}$. Differentiating (2.15) by FUBINI'S theorem we obtain

$$d_k(s)-d_k(s+t)=\sum_j{}' g_{kj}(s)\,F_{jk}(t), \tag{4.8}$$

$$d_k(t)-d_k(s+t)=\sum_j{}' G_{kj}(s)\,f_{jk}(t) \tag{4.9}$$

for almost all pairs $s, t>0$. By (4.4) and (4.5) we see that

$$\sum_j{}' g_{kj}(s)\,F_{jk}(t)=\sum_j{}' g_{kj}(s-r)\left(F_{jk}(t+r)-F_{jk}(r)\right) \tag{4.10}$$

for $t>0$, $0<r<s$, which implies that the right hand side of (4.8) will converge for all $s, t>0$ and is continuous in both variables in view of the monotonicity and continuity of $F_{jk}$. But then there must exist a continuous version of $d_k(s)$, $s>0$, in (2.25), and this version will satisfy (4.8), (4.9) for all $s, t>0$.

Hence $d_k(r)$ will even be absolutely continuous for $r>0$, and differentiating again gives

$$-d_k'(s+t)=\sum_j{}' g_{kj}(s)\,f_{jk}(t) \quad \text{(almost all pairs } s,t>0). \tag{4.11}$$

Differentiating (2.11) or (3.1) gives for continuity reasons

$$-p_{kk}'(t)=d_k(t)+\int_0^t p_{kk}'(t-s)\,d_k(s)\,ds \qquad (t>0), \tag{4.12}$$

and therefore $d_k(+0)=-q_{kk}$ since $d_k(t)$ is non-increasing. Actually, (3.1) already implies

$$1-p_{kk}(t)=\big(1+o(1)\big)\,D_k(t) \quad \text{as} \quad t\to+0. \tag{4.13}$$

But the problem of whether or not $p_{kk}'(t)\to-\infty$ $(t\to+0)$, in case that $q_{kk}=-\infty$, remains unsettled. For regular Markov processes (2.27) implies

$$d_k(s)=\sum_i{}' g_{ki}(s)\geqq 0, \tag{4.13}$$

at first for almost all $s>0$ only. But by (2.26)

$$\begin{aligned}\sum_i{}' g_{ki}(s)&=\sum_i{}' g_{ki}(s-r)\big(1-F_{ik}(r)\big)\\&=\sum_i{}' g_{ki}(s-r)-\big(d_k(s-r)-d_k(s)\big)\end{aligned}$$

for $0<r<s$, and therefore (4.13) holds for all $s>0$.

The non-increasing function $d_k(t)$ will be $\geqq 0$ for all $t>0$ if and only if the limit $d_k(+\infty)\geqq 0$. Using (3.1) elementary considerations show that

$$p_{kk}(t)\leqq 1 \qquad (\text{all } t>0) \tag{4.14}$$

implies $d_k(+\infty)\geqq 0$, in fact

$$\begin{cases} d_k(+\infty)=1/P_{kk}(+\infty), & \text{if} \quad P_{kk}(+\infty)=\int_0^{+\infty} p_{kk}(s)\,ds<+\infty\\ d_k(+\infty)=0, & \text{if} \quad P_{kk}(+\infty)=+\infty. \end{cases} \tag{4.15}$$

Conversely, $d_k(+\infty)\geqq 0$ implies (4.14) trivially. If $d_k(+\infty)$ is finite we infer from (4.8), (4.9) by monotone convergence

$$d_k(s)-d_k(+\infty)=\sum_j{}' g_{kj}(s)\,F_{jk}(+\infty) \qquad (s>0), \tag{4.16}$$

$$d_k(t)-d_k(+\infty)=\sum_j{}' G_{kj}(+\infty)\,f_{jk}(t) \qquad (t>0), \tag{4.17}$$

where $0\cdot\infty=\infty\cdot 0=0$ by definition. Thus (4.14) implies $F_{jk}(+\infty)<+\infty$ if $g_{kj}(s)\not\equiv 0$ or equivalently if $p_{kj}(s)\not\equiv 0$, and $G_{kj}(+\infty)<+\infty$ if $f_{jk}(t)\not\equiv 0$ or $p_{jk}(t)\not\equiv 0$. For regular Markov processes $F_{ik}(+\infty)<+\infty$ follows already from (2.26), see also CHUNG [2]. If $F_{ik}(+\infty)<+\infty$ then (2.13) implies in the same way

$$F_{ik}(+\infty)-F_{ik}(s)=\sum_j{}' {}_kp_{ij}(s)\,F_{jk}(+\infty) \qquad (s>0), \tag{4.18}$$

if $G_{kj}(+\infty)<+\infty$ then (2.14) implies

$$G_{kj}(+\infty)-G_{kj}(t)=\sum_i{}' G_{ki}(+\infty)\,{}_k\hat{p}_{ij}(t) \qquad (t>0). \tag{4.19}$$

However these assumptions may not be satisfied in general, and we will have to look for other representations of $F_{ik}$ and $G_{kj}$. For regular Markov processes one should compare (4.18) with (2.26), and (4.16) with (4.13).

We summarize some of the results as follows.

**Theorem 3.** *For every semi-group the derivatives $F'_{ik}(t)=f_{ik}(t)$, $G'_{kj}(t)=g_{kj}(t)$, $D'_k(t)=d_k(t)$ are absolutely continuous for $t>0$, have limits $f_{ik}(+\infty)=q_{ik}$ $(i\neq k)$, $g_{kj}(+0)=q_{kj}$ $(j\neq k)$, $d_k(+0)=-q_{kk}$, and satisfy the equations* (4.4), (4.5), (4.11). *Under additional assumptions as* (4.14) *and all $p_{ik}(t)\not\equiv 0$, $p_{kj}(t)\not\equiv 0$, the functions $F_{ik}(t)$, $G_{kj}(t)$, $d_k(t)$ are completely determined by the constants $F_{jk}(+\infty)$, $G_{ki}(+\infty)$, $P_{kk}(+\infty)$ and the semi-group $({}_k\hat{p}_{ij}(t))$ according to* (4.18), (4.19), (4.15), (4.16), (4.17).

**5. General construction.** To determine the functions $F_{ik}$, $G_{kj}$, $d_k$ in general we restrict ourselves to generalized Markov processes, *i.e.* $\hat{p}_{ij}(\lambda)<+\infty$, and therefore ${}_k\hat{p}_{ij}(\lambda)<+\infty$ $(\lambda>0)$. Our formulae then imply that the Laplace transforms[2])

$$\hat{f}_{ik}(\lambda)=\hat{p}_{ik}(\lambda)/\hat{p}_{kk}(\lambda) \quad (i\neq k), \qquad \hat{g}_{kj}(\lambda)=\hat{p}_{kj}(\lambda)/\hat{p}_{kk}(\lambda) \quad (j\neq k),$$
$$\hat{d}_k(\lambda)=\big(\lambda\,\hat{p}_{kk}(\lambda)\big)^{-1}-1$$

exist for $\lambda>0$. Our discussion is based on analogues of the resolvent equation which is treated explicitly in § 6. For regular Markov processes the following could be restricted to the consideration of the functions $G_{kj}$ only.

To discuss the construction of $F_{ik}$, $G_{kj}$ we consider functions $W_i(t)$ satisfying (4.1). Our previous determination of these functions was achieved by letting $t\to+\infty$ in (4.1). Another simple attempt consists in letting $t\to+0$ in (4.2). It is possible, however, to avoid the stronger assumptions which go naturally with these methods, and to work with

$$\hat{w}_i(\lambda)=\int_{+0}^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dW_i(t)=\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\,w_i(t)\,dt<+\infty \qquad (\text{all } \lambda>0) \tag{5.1}$$

only. The methods above appear to be the limiting cases of what follows for $\mu\to+0$ or $\mu\to+\infty$ respectively.

Letting $t\to+0$ in (4.1) implies by monotone convergence that all $W_i(+0)=0$. From (4.2) and (5.1) we infer

$$\sum_m p_{im}(s)\,\hat{w}_m(\mu)=\int_0^{\infty} e^{-\mu t}\,w_i(s+t)\,dt<+\infty, \tag{5.2}$$

$$\sum_m \hat{p}_{im}(\lambda)\,\hat{w}_m(\mu)=(\mu-\lambda)^{-1}\{\hat{w}_i(\lambda)-\hat{w}_i(\mu)\}<+\infty, \tag{5.3}$$

$$\sum_m P_{im}(s)\,\hat{w}_m(\mu)<+\infty \tag{5.4}$$

for all $i$, $s>0$, $\mu>0$, $\lambda>0$, $\lambda\neq\mu$. Also, since $e^{-\mu t}W_i(t)\to 0\,(t\to+\infty)$,

$$\mu\int_0^\infty e^{-\mu t}\{W_i(s+t)-W_i(t)\}\,dt = \tilde{W}_i(s)+\int_0^\infty e^{-\mu t}w_i(s+t)\,dt - \hat{w}_i(\mu)$$

by partial integration, and together with (5.2) and its integral (5.4)

$$W_i(s)=\hat{w}_i(\mu)-\sum_m \hat{p}_{im}(s)\,\hat{w}_m(\mu)+\mu\sum_m P_{im}(s)\,\hat{w}_m(\mu) \tag{5.5}$$

for all $i$, $s>0$, $\mu>0$. Now fix $\mu>0$ and put $\omega_i=\hat{w}_i(\mu)$. Then

$$\omega_i\geqq 0,\qquad \sum_m \hat{p}_{im}(\lambda)\,\omega_m<+\infty \qquad (\lambda>0), \tag{5.6}$$

$$W_i(s)=\omega_i-\sum_m p_{im}(s)\,\omega_m+\mu\sum_m P_{im}(s)\,\omega_m\geqq 0 \tag{5.7}$$

for all $i$, $s>0$, the series being convergent because of (5.6). If, conversely, $\omega_i$ are arbitrary constants satisfying (5.6), (5.7) the functions $W_i(s)$, as defined by (5.7), will obviously satisfy (4.1), and also (5.1) is easily checked. Thus we obtain

**Lemma 4.** *Functions $W_i$ will satisfy* (4.1) *and* (5.1) *if and only if there are constants $\omega_i$ satisfying* (5.6), (5.7) *for (arbitrarily) fixed $\mu>0$.*

It goes without saying that there is a dual form of Lemma 4 also. The inequality (5.7) is essential for small values of $s$ only and can be simplified under additional assumptions. Application of Lemma 4 to $F_{ik}$, $i\neq k$, and the generalized Markov process $({}_kp_{ij}(t))$ yields

$$F_{ik}(s)=\varphi_i-\sum_j{}' {}_k\hat{p}_{ij}(s)\,\varphi_j+\mu\sum_j{}' {}_kP_{ij}(s)\,\varphi_j, \tag{5.8}$$

for all $i\neq k$, $s>0$, fixed $\mu>0$, where ${}_kP_{ij}(s)=\int_0^s {}_kp_{ij}(t)\,dt$ and $\varphi_i=\hat{f}_{ik}(\mu)$ satisfies the conditions

$$\varphi_i\geqq 0,\qquad \sum_j{}' {}_k\hat{p}_{ij}(\lambda)\,\varphi_j<+\infty \qquad (\lambda>0), \tag{5.9}$$

$$F_{ik}(s)\geqq 0 \qquad (\text{all } i\neq k,\ s>0). \tag{5.10}$$

Dually, for all $j\neq k$, $t>0$, $\lambda>0$, fixed $\mu>0$

$$G_{kj}(t)=\gamma_j-\sum_i{}' \gamma_i\cdot {}_kp_{ij}(t)+\mu\sum_i{}' \gamma_i\cdot {}_kP_{ij}(t), \tag{5.11}$$

$$\gamma_j\geqq 0,\qquad \sum_i{}' \gamma_i\cdot {}_k\hat{p}_{ij}(\lambda)<+\infty,\qquad G_{kj}(t)\geqq 0, \tag{5.12}$$

where $\gamma_j=\hat{g}_{kj}(\mu)$. Conversely, if $\varphi_i$ and $\gamma_j$ are arbitrary constants satisfying (5.9), (5.10), (5.12) the functions $F_{ik}$ and $G_{kj}$, as defined by (5.8) and (5.11),

will satisfy (2.13), (2.14) and its consequences as (4.4), (4.5), (4.6). Furthermore (5.3) includes the formulae

$$\sum_j{}' {}_k\hat{p}_{ij}(\lambda)\,\hat{f}_{jk}(\mu) = (\mu-\lambda)^{-1}\{\hat{f}_{ik}(\lambda) - \hat{f}_{ik}(\mu)\}, \tag{5.13}$$

$$\sum_i{}' \hat{g}_{ki}(\mu)\,{}_k\hat{p}_{ij}(\lambda) = (\mu-\lambda)^{-1}\{\hat{g}_{kj}(\lambda) - \hat{g}_{kj}(\mu)\} \tag{5.14}$$

for all $i \neq k$, $j \neq k$, $\mu>0$, $\lambda>0$, $\lambda \neq \mu$. Also, by taking Laplace transforms of (5.8) and (5.11), we find that $\varphi_i = \hat{f}_{ik}(\mu)$, $\gamma_j = \hat{g}_{kj}(\mu)$ necessarily.

To determine $d_k(t)$ we use the Abelian remark that

$$d_k(+\infty) = \lim_{\lambda\to+0} \lambda\,\hat{d}_k(\lambda) = \lim_{\lambda\to+0} \big(\hat{p}_{kk}(\lambda)\big)^{-1} \geqq 0, \tag{5.15}$$

and hence (4.14), (4.15), (4.16), (4.17). Taking Laplace transforms of (4.16), (4.17) we find for $\lambda>0$

$$\hat{d}_k(\lambda) - \frac{1}{\lambda}\,d_k(+\infty) = \sum_j{}' \hat{g}_{kj}(\lambda)\,F_{jk}(+\infty) = \sum_j{}' G_{kj}(+\infty)\,\hat{f}_{jk}(\lambda), \tag{5.16}$$

in particular with[5]) $\delta = \hat{d}_k(\mu)$, fixed $\mu>0$,

$$\sum_j{}' \gamma_j F_{jk}(+\infty) = \sum_j{}' G_{kj}(+\infty)\,\varphi_j \leqq \delta < +\infty. \tag{5.17}$$

Since $F_{jk}(+\infty) = \hat{f}_{jk}(+0)$, $G_{kj}(+\infty) = \hat{g}_{kj}(+0)$ this includes the estimate $\sum \gamma_j \varphi_j < +\infty$ and represents a further restriction in the choice of $\varphi_i$, $\gamma_j$. Now (4.16), (4.17) take the forms

$$d_k(s) = \mu\Big(\delta - \sum_j{}' \gamma_j F_{jk}(+\infty)\Big) + \sum_j{}' g_{kj}(s)\,F_{jk}(+\infty), \tag{5.18}$$

$$d_k(t) = \mu\Big(\delta - \sum_j{}' G_{kj}(+\infty)\,\varphi_j\Big) + \sum_j{}' G_{kj}(+\infty)\,f_{jk}(t) \tag{5.19}$$

for $s$, $t>0$, fixed $\mu>0$. Thus $d_k$ is determined by one constant $\delta$ provided that $F_{ik}$, $G_{kj}$ are already given. To complete the construction we consider the converse. Suppose that $F_{ik}$, $G_{kj}$ are constructed as before, choose $\delta$ according to (5.17), and define $d_k$ by (5.18), (5.19). From (4.4), (4.5) we infer that the sums in (5.17) coincide and that (5.18), (5.19) define the same function $d_k$. By letting $t\to+\infty$ in (4.10) we obtain

$$\sum_j{}' g_{kj}(s)\,F_{jk}(+\infty) = \sum_j{}' g_{kj}(s-r)\,\big(F_{jk}(+\infty) - F_{jk}(r)\big) \tag{5.20}$$

for all $0<r<s$. The series on the left in (5.20) converges for almost all $s>0$ because of (5.17), but the identity shows that the exceptional set is empty and that the function represented decreases to zero when $s$ increases to infinity (keep $s-r$ constant), in particular

$$d_k(+\infty) = \mu\,\delta - \mu\sum_j{}' \gamma_j F_{jk}(+\infty) = \mu\,\delta - \mu\sum_j{}' G_{kj}(+\infty)\,\varphi_j. \tag{5.21}$$

[5]) Contrary to the notation of (1.15) which will not be used again.

Furthermore, (5.20) implies (4.8), and dual arguments give (4.9). Also (4.11) follows as before. Because of (5.17) we have $d_k(t) \geqq 0$ for $t>0$ and $\hat{d}_k(\mu)<+\infty$. This implies that $d_k(t)$ is integrable into zero and that $\hat{d}_k(\lambda)<+\infty$ for all $\lambda>0$ in view of (5.21). Now also (5.16) follows including the equation $\delta=\hat{d}_k(\mu)$ for $\lambda=\mu$. From (4.11) we infer for $t>0$, $\mu>0$

$$\sum_j{}' \gamma_i f_{jk}(t) = \sum_j{}' g_{kj}(t)\, \varphi_j = d_k(t) - \mu \int_0^\infty e^{-\mu s} d_k(s+t)\, ds, \tag{5.22}$$

since (4.11) actually holds for almost all values of $s+t$. Partial integration gives

$$\mu \int_0^\infty e^{-\mu s}\{D_k(s+t) - D_k(s)\}\, ds = D_k(t) + \int_0^\infty e^{-\mu s} d_k(s+t)\, ds - \hat{d}_k(\mu),$$

and therefore, as in the proof of (5.5),

$$d_k(t) = \mu\, \delta + \sum_j{}' \gamma_j f_{jk}(t) - \mu \sum_j{}' \gamma_j F_{jk}(t), \tag{5.23}$$

$$d_k(t) = \mu\, \delta + \sum_j{}' g_{kj}(t)\, \varphi_j - \mu \sum_j{}' G_{kj}(t)\, \varphi_j \tag{5.24}$$

for all $t>0$, fixed $\mu>0$. Also, by taking Laplace transforms of (5.22), (5.23), (5.24), we obtain

$$\sum_j{}' \hat{g}_{kj}(\mu)\, \hat{f}_{jk}(\lambda) = (\mu-\lambda)^{-1}\{\mu\, \hat{d}_k(\mu) - \lambda\, \hat{d}_k(\lambda)\} \tag{5.25}$$

for all $\lambda>0$, $\mu>0$, $\lambda \neq \mu$. It is clear that (5.23), (5.24) could have been used as definition for $d_k$ as well.

We summarize only the necessary part of some of the results.

**Theorem 4.** *For every generalized Markov process and (arbitrarily) fixed $\mu>0$ the functions $F_{ik}, G_{kj}, d_k$ are completely determined by the constants $\varphi_i=\hat{f}_{ik}(\mu)$, $\gamma_j=\hat{g}_{kj}(\mu)$, $\delta=\hat{d}_k(\mu)$ and the generalized Markov process $\left({}_k p_{ij}(t)\right)$ according to* (5.8), (5.11), (5.18), (5.19), (5.23), (5.24). *The constants $\varphi_i$, $\gamma_j$, $\delta$ are uniquely determined by the constants $\hat{p}_{ik}(\mu)$, $\hat{p}_{kj}(\mu)$, $\hat{p}_{kk}(\mu)$ and satisfy the conditions* (5.9), (5.10), (5.12), (5.17).

**6. Converse.** The converse will now be completed by

**Theorem 5.** *To every generalized Markov process $\left({}_k p_{ij}(t)\right)$ which does not contain the index $k$ and to every choice of constants $\varphi_i$, $\gamma_j$, $\delta$ satisfying* (5.9), (5.10), (5.12), (5.17) *for (arbitrarily) fixed $\mu>0$ there exists exactly one generalized Markov process $\left(p_{ij}(t)\right)$ such that*

$$\varphi_i = \hat{p}_{ik}(\mu)/\hat{p}_{kk}(\mu), \quad \gamma_j = \hat{p}_{kj}(\mu)/\hat{p}_{kk}(\mu), \quad \delta = \left(\mu\, \hat{p}_{kk}(\mu)\right)^{-1} - 1 \tag{6.1}$$

*for all $i \neq k$, $j \neq k$, and $\left({}_k p_{ij}(t)\right)$ is related to $\left(p_{ij}(t)\right)$ as in Theorem 1. The results of Theorems 1, 2, 3, 4 apply without change in notation.*

*Proof.* In § 5 we already defined the functions $F_{ik}$, $G_{kj}$, $d_k$ and obtained their properties. One could now try to define $p_{ij}(t)$ by our continuous formulae

and to investigate their properties by means of convolutions. It turns out to be much simpler, however, to use Laplace transforms, defining

$$r_{kk}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \hat{d}_k(\lambda)\right)^{-1}, \quad \frac{1}{\lambda} - r_{kk}(\lambda) = r_{kk}(\lambda)\,\hat{d}_k(\lambda) \qquad (\lambda > 0), \tag{6.2}$$

$$r_{ik}(\lambda) = \hat{f}_{ik}(\lambda)\, r_{kk}(\lambda), \quad r_{kj}(\lambda) = r_{kk}(\lambda)\,\hat{g}_{kj}(\lambda) \qquad (i \neq k,\ j \neq k,\ \lambda > 0), \tag{6.3}$$

$$r_{ij}(\lambda) = {}_k\hat{p}_{ij}(\lambda) + \hat{f}_{ik}(\lambda)\, r_{kk}(\lambda)\,\hat{g}_{kj}(\lambda) \qquad (i \neq k,\ j \neq k,\ \lambda > 0). \tag{6.4}$$

Notice that all $r_{ij}(\lambda)$ are non-negative. The semi-group property for $({}_kp_{ij}(t))$ implies the resolvent equation

$$\sum_m{}' {}_k\hat{p}_{im}(\mu)\, {}_k\hat{p}_{mj}(\lambda) = (\mu - \lambda)^{-1}\left\{{}_k\hat{p}_{ij}(\lambda) - {}_k\hat{p}_{ij}(\mu)\right\} \tag{6.5}$$

for all $i \neq k$, $j \neq k$, $\mu > 0$, $\lambda > 0$, $\lambda \neq \mu$. Next we show

$$\sum_m r_{im}(\mu)\, r_{mj}(\lambda) = (\mu - \lambda)^{-1}\left\{r_{ij}(\lambda) - r_{ij}(\mu)\right\} \tag{6.6}$$

for all $i, j$, $\mu > 0$, $\lambda > 0$, $\lambda \neq \mu$. For $i = j = k$ this follows from (5.25), for $i = k$ and $j \neq k$ one also uses (5.14), for $i \neq k$ and $j = k$ one also uses (5.13), for $i \neq k$ and $j \neq k$ one uses (6.5) in addition. The series in (6.6) converges since the right hand side is finite. As FELLER [4] noticed (6.6) implies, by computing the higher order differences, that all $r_{ij}(\lambda)$ are completely monotonic for $\lambda > 0$. Since also $\hat{d}_k(\lambda)$ is completely monotonic so is $r_{kk}(\lambda)$ and $\lambda^{-1} - r_{kk}(\lambda)$, by (6.2). A double application of the Bernstein-Hausdorff theorem shows that there exists a function $p_{kk}(t)$, defined for almost all $t > 0$, $0 \leq p_{kk}(t) \leq 1$, with Laplace transform $\hat{p}_{kk}(\lambda) = r_{kk}(\lambda)$, and satisfying (3.1) for almost all $t > 0$ because of (6.2). But the right hand side of (3.1) is continuous for $t > 0$ and $\to 0$ as $t \to +0$. Therefore there exists a continuous version of $p_{kk}(t)$ which satisfies (3.1) for all $t > 0$ and which $\to 1$ as $t \to +0$. Having defined $p_{kk}(t)$ this way we use (2.7), (2.9) to define $p_{ik}(t)$, $p_{kj}(t)$, and (2.8), (2.10) to define $p_{ij}(t)$ for all $t > 0$, $i \neq k$, $j \neq k$. Thus all $p_{ij}(t)$ will be continuous for $t > 0$, $p_{ij}(t) \to \delta_{ij}$ as $t \to +0$, and $\hat{p}_{ij}(\lambda) = r_{ij}(\lambda)$ by comparison with (6.3), (6.4). Also, it is apparent that for $t > 0$

$$0 \leq 1 - p_{kk}(t) \leq D_k(t), \tag{6.7}$$

$$0 \leq p_{ik}(t) \leq F_{ik}(t), \quad 0 \leq p_{kj}(t) \leq G_{kj}(t) \qquad (i \neq k,\ j \neq k), \tag{6.8}$$

$${}_kp_{ij}(t) \leq p_{ij}(t) \leq {}_kp_{ij}(t) + F_{ik}(t)\, G_{kj}(t) \qquad (i \neq k,\ j \neq k). \tag{6.9}$$

To establish the semi-group property

$$p_{ij}(s + t) = \sum_m p_{im}(s)\, p_{mj}(t)$$

for all $i, j$, $s > 0$, $t > 0$ we notice that the series on the right hand side is majorized, according to the inequalities above, by series which are uniformly convergent in finite $s$, $t$ intervals because of DINI's theorem. This implies convergence and continuity as function of the pair $s$, $t$. The resolvent equation

(6.6) means that the Laplace transforms of both sides coincide, and LERCH's theorem now gives the conclusion desired. Thus $(p_{ij}(t))$ is a generalized Markov process, and the relations mentioned in Theorem 1 hold without change of notation, *i.e.* $({}_k p_{ij}(t))$, $F_{ik}(t)$, $G_{kj}(t)$, $D_k(t)$ have its standard meaning. It was mentioned in § 5 that necessarily $\varphi_i = \hat{f}_{ik}(\mu)$, $\gamma_j = \hat{g}_{kj}(\mu)$, $\delta = \hat{d}_k(\mu)$ for $i \neq k$, $j \neq k$ which implies (6.1). But then the results of Theorems 1, 2, 3, 4 apply without change in notation. Since our formulae determine continuous functions $p_{ij}(t)$ uniquely from $F_{ik}(t)$, $G_{kj}(t)$, $d_k(t)$, and since these functions are uniquely determined by $\hat{f}_{ik}(\mu)$, $\hat{g}_{kj}(\mu)$, $\hat{d}_k(\mu)$ according to Theorem 4, condition (6.1) will determine $(p_{ij}(t))$ uniquely. This completes the proof.

It seems worth mentioning that the resolvent equation also opens another way to define the functions $d_k(t)$, $f_{ik}(t)$, $g_{kj}(t)$, ${}_k p_{ij}(t)$. We simply define their Laplace transforms according to (6.2), (6.3), (6.4). The resolvent equation (6.6) is actually equivalent to (5.25), (5.14), (5.13), and (6.5). If ${}_k\hat{p}_{ij}(\lambda) \geqq 0$ or, equivalently, $\hat{p}_{ij}(\lambda)\,\hat{p}_{kk}(\lambda) \geqq \hat{p}_{ik}(\lambda)\hat{p}_{kj}(\lambda)$ we can conclude that ${}_k\hat{p}_{ij}(\lambda)$, $\hat{g}_{kj}(\lambda)$, and $\hat{f}_{ik}(\lambda)$ are completely monotonic for $\lambda > 0$. Now (6.4) implies the same for $\hat{p}_{ij}(\lambda) - {}_k\hat{p}_{ij}(\lambda)$ and (5.25) for $\hat{d}_k(\lambda)$ by letting $\mu \to +0$ first and then adding a non-negative multiple of $\lambda^{-1}$. Finally, the Bernstein-Hausdorff theorem ensures the existence of functions ${}_k p_{ij}(t)$, $G_{kj}(t)$, $F_{ik}(t)$, $D_k(t)$ with standard properties. If one fills in all the details, however, this will hardly be simpler than our previous approach although somewhat more restrictive in scope. For regular Markov processes the inequality $p_{ij} * p_{kk} \geqq p_{ik} * p_{kj}$, which is the starting point of this method, can easily be obtained by probabilistic arguments as was pointed out to me by K. L. CHUNG.

In case of a regular Markov process $(p_{ij}(t))$ the complete construction is simplified in view of (2.26), (2.27), (4.13). There is only need to construct $G_{kj}$ according to (5.11) with constants $\gamma_j$ satisfying $\gamma_j \geqq 0$, $\sum' \gamma_j < +\infty$, and

$$\gamma_i - \sum_i' \gamma_i \cdot {}_k p_{ij}(t) + \mu \sum_i' \gamma_i \cdot {}_k P_{ij}(t) \geqq 0 \qquad (j \neq k,\ t > 0).$$

For $({}_k p_{ij}(t))$ we may have any ordinary Markov process which does not contain the index $k$. Theorems 4 and 5 remain true with corresponding changes. The simpler construction of Theorem 3 holds in this case also under the additional assumption $P_{kk}(+\infty) = +\infty$, because then either $F_{jk}(+\infty) = 1$ $(j \neq k)$ and therefore $G_{kj}(+\infty) < +\infty$ or $F_{jk}(+\infty) < 1$ and therefore $g_{kj}(s) \equiv 0$. Also necessary and sufficient conditions for these constants can be derived in analogy to Theorems 4 and 5.

**7. Conclusion.** In this section we indicate lines of further study and a few results related to them.

It was mentioned before that we do not know of whether or not $p'_{kk}(t) \to -\infty$ $(t \to +0)$ if $q_{kk} = -\infty$. Now (4.12), (4.13) imply

$$\operatorname*{var}_{0 \leq s \leq t} p_{kk}(s) = O\left(1 - p_{kk}(t)\right) \qquad (t \to +0), \tag{7.1}$$

and therefore, by (3.17), it would be sufficient if $p_{kk}(2t)-p_{kk}(t)^2$ is small compared with $tp'_{kk}(t)$ or $1-p_{kk}(t)$. From (3.4) we obtain the sufficient conditions $d_k * d_k = o(d_k)$ and $d_k(t)\,(1-p_{kk}(t)) = o(1)\,d_k(2t)$ as $t \to +0$.

From (4.2) we infer

$$t\,w_i(t) = \sum_m p_{im} * w_m \tag{7.2}$$

which will show in conjunction with (2.9) that $tw_i(t)$ is absolutely continuous for $t \geqq 0$. Thus it follows that $tf_{ik}(t)$ and $tg_{kj}(t)$ is absolutely continuous for $t \geqq 0$; for $td_k(t)$ this is trivial. A similar argument proves that all $tp'_{ij}(t)$ are absolutely continuous for $t \geqq 0$. For $t > 0$ this was already mentioned before, and the improvement is not enough for purposes as above.

Our discrete formulae also imply that $p_{kk}(nh)/p_{kk}(h)^n$ is a non-decreasing convex sequence for fixed $h > 0$, but there does not seem to exist any continuous analogue when $q_{kk} = -\infty$. If $p'_{kk}(t) \to -\infty$ then $p_{kk}(t)$ is decreasing in some interval, but from $\sum_m q_{km} q_{mk} \geqq 0$ one might guess that $p_{kk}(t)$ is even convex in some interval depending upon $k$. From $p'_{ij}(t) \to q_{ij}$ for $i \neq j$ follows that $p_{ij}(t)$ is increasing in some interval depending upon $i$ and $j$ if $q_{ij} > 0$, and one might hope that this remains true if $q_{ij} = 0$, perhaps even in some interval depending upon $i$ or $j$ only.

As for ergodic behavior it would be interesting to know when $\int_0^\infty |p'_{kk}(t)|\,dt < +\infty$ holds.

Our theory discusses the relations between the process $(p_{ij}(t))$ and $({}_kp_{ij}(t))$ which does not contain a $k$-th column or row. If the derivative matrix $(q_{ij})$ contains only finite elements except for $q_{kk} = -\infty$ the corresponding derivative matrix for $({}_kp_{ij}(t))$ contains no infinite elements, in fact ${}_kp'_{ij}(0) = q_{ij}$ $(i \neq k,\ j \neq k)$. The simplest case occurs when $({}_kp_{ij}(t))$ is FELLER's minimal process[6]) associated with the reduced derivative matrix. Conversely, one may start with such a Feller process and then construct $(p_{ij}(t))$ with $q_{kk} = -\infty$ if one wishes to. This will happen if and only if the constants are chosen in such a way that $d_k(+0) = \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda \hat{d}_k(\lambda) = +\infty$. As a particular case one obtains the well known construction of KOLMOGOROV [9] which has been closely examined by KENDALL-REUTER [8] and KENDALL [7]. For certain Feller processes $({}_kp_{ij}(t))$ it might be quite possible to find explicitly all vectors $(\gamma_j)$ satisfying the inequalities mentioned at the end of § 6, and by constructing all $(p_{ij}(t))$, perhaps, some light could be shed on the questions mentioned above.

It would be interesting to consider the case where instead of one index $k$ an arbitrary set of indices is taboo, *cf.* CHUNG [2]. However the reduced processes like $({}_kp_{ij}(t))$ do not have much better properties in general. A more natural structure problem consists in how to construct $(p_{ij}(t))$ from the Feller process associated with the same derivative matrix. Partial answers

[6]) For a general definition see *e.g.* [4], [6].

have been obtained by FELLER [4] and REUTER [11], and there is not only a striking analogy in formulae, but FELLER has also related these questions to each other in a special case. The author has been able to generalize their results and will discuss this problem on a later occasion.

Finally we mention the formula

$$g_{kj}(t) = \lim_{h \to +0} \frac{1}{h} \sum_{m}{}' p_{km}(h)\, {}_k p_{mj}(t) \qquad (j \neq k,\ t > 0) \tag{7.3}$$

which was suggested to the author by K. L. CHUNG. It is an immediate consequence of (2.9) and (4.5).

## References

[1] CHUNG, K. L.: Some new developments in Markov chains. Trans. Amer. Math. Soc. **81**, 195–210 (1956). — [2] CHUNG, K. L.: Some aspects of continuous parameter Markov chains. Publ. Inst. Statist., Univ. Paris **6**, 271–287 (1957). — [3] CHUNG, K. L.: Markov chains with stationary transition probabilities. Heidelberg: Springer 1960. — [4] FELLER, W.: On boundaries and lateral conditions for the Kolmogoroff differential equations. Annals Math. (2) **65**, 527–570 (1957). — [5] JURKAT, W.B.: On semi-groups of positive matrices (I). Scripta Math. **24**, 123–131 (1959). — [6] JURKAT, W. B.: On semi-groups of positive matrices (II). Scripta Math. **24**, 207—218 (1959). — [7] KENDALL, D. G.: Some further pathological examples in the theory of denumerable Markov processes. Quart. J. Math. (2) **7**, 39–56 (1956). — [8] KENDALL, D. G., and G. E. H. REUTER: Some pathological Markov processes with a denumerable infinity of states and the associated semigroups of operators on $l$. Proc. Intern. Congr. Math. Amsterdam **1954** (III), 377–415 (1956). — [9] KOLMOGOROV, A. N.: On some problems concerning the differentiability of the transition probabilities in a temporally homogeneous Markov process having a denumerable number of states [Russian]. Ucenye Zapiski Moskov. Gos. Univ. Matem. (4) **148**, 53–59 (1951). — [10] ORNSTEIN, D.: The differentiability of transition functions. Bull. Amer. Math. Soc. **66**, 36—39 (1960). — [11] REUTER, G. E. H.: Denumerable Markov processes (II). J. London Math. Soc. **34**, 81–91 (1959). — [12] TITCHMARSH, E. C.: Introduction to the theory of Fourier integrals, first ed. Oxford 1937.

*Dept. of Math., Syracuse University, Syracuse, N. Y. (U.S.A.)*

*(Eingegangen am 30. September 1959)*

PICONE, M.
Math. Zeitschr. 73, 366–373 (1960)

# „Lunghezza" per un insieme di elementi di un arbitrario spazio metrico e sua semicontinuità inferiore

Nota dedicata a OSKAR PERRON

Di

**MAURO PICONE**

In una mia nota recente[1]) ho dato un rapido cenno di una nozione di *variazione totale* per una funzione $f(x)$, nell'ipotesi, secondo la quale, questa, rappresentando $x$ un elemento variabile in un insieme di elementi, di un arbitrario spazio astratto, abbia il *coinsieme*, descritto da $u$, appartenente ad uno spazio metrico, del pari arbitrario. In una mia successiva conferenza, tenuta il 5 maggio di quest'anno al Seminario Matematico e Fisico di Milano[2]), son ritornato su quella nozione, approfondendola, abbozzandone una teoria e dando anche alcuni esempi particolari, con i quali si vede, fra l'altro, che in quella nozione rientra una determinazione posta dal TONELLI — allo scopo di caratterizzare analiticamente le superficie dotate di area finita, nel senso di LEBESGUE — a base del concetto di quelle funzioni reali di due variabili reali, da Lui dette a *variazione limitata*.

Nella presente breve nota che, pur temendone la inadeguatezza, oso dedicare ad OSKAR PERRON, propongo di utilizzare la sopraddetta nozione di variazione totale, per attribuire una „lunghezza" ad un insieme di elementi di un arbitrario spazio metrico, la quale sia in possesso, come quella delle curve, di una certa semicontinuità inferiore.

**1.** VARIAZIONE TOTALE DI UNA FUNZIONE METRICA. In un insieme $A$ qualsivoglia, di elementi di uno spazio astratto $\Sigma$, del quale indicherò con $x$ l'elemento generico, sia definita una funzione

$$u = f(x), \tag{1}$$

la quale, al variare di $x$ in $A$, sia sempre un elemento $u$ di uno spazio metrico $U$, abbia cioè la funzione, come io soglio dire[3]), il *coinsieme* contenuto nello spazio $U$. Dico la funzione $f(x)$ *metrica*, se lo spazio $U$ è metrico e indicando col simbolo

$$d(u, u')$$

[1]) Sul concetto di limite. Ann. di Mat. pura ed appl. Ser. IV **46**, 349–368 (1958).

[2]) Sulla variazione totale di una funzione metrica. Rend. Sem. Mat. e Fis. Milano **29** (1959).

[3]) *Cfr.* PICONE e FICHERA: Trattato di Analisi Matematica Editore Tumminelli, Roma 1954, n° 40 del I volume.

la distanza fra due elementi $u$ e $u'$ di $U$, chiamo *variazione assoluta della funzione* $f(x)$, *competente al passaggio dell'elemento* $x$ *di* $A$ *all'elemento* $x'$, *del pari di* $A$, *la distanza*

$$d[f(x), f(x')].$$

Sia $\{X\}$ un aggregato di insiemi dello spazio $\Sigma$, aggregato tale che, per ogni elemento $x^{(0)}$, comunque fissato in $A$, esista uno ed un solo suo insieme $X$, insieme che indicherò col simbolo $X(x^{(0)})$, al quale $x^{(0)}$ appartiene. Presi due elementi $x^{(0)}$ e $x'$ di $A$, eventualmente concidenti, dico che l'elemento $x'$ *è seguente* all'elemento $x^{(0)}$, o *segue* l'elemento $x^{(0)}$, *sull'aggregato* $\{X\}$, oppure che $x^{(0)}$ *è precedente* a $x'$ o *precede* $x'$ e scriverò

$$x^{(0)} \to x' \,(\text{su } \{X\}), \tag{2}$$

se esistono, in $A$, $n$ elementi $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$, designando $n$ un numero intero, positivo o nullo, tali che riesca:

$$x^{(1)} \in X(x^{(0)}), \quad x^{(2)} \in X(x^{(1)}), \ldots, x^{(n)} \in X(x^{(n-1)}), \quad x' \in X(x^{(n)}). \tag{3}$$

Presi due elementi $x$ e $x'$ di $A$ e supposto che $x'$ segua $x$, sull'aggregato $\{X\}$, chiamo *arco di* $A$ $(su\ \{X\})$, *di origine* $x$ *e termine* $x'$ e lo indico col simbolo

$$\text{arc}_A(x, x') \,(\text{su } \{X\}), \tag{4}$$

l'insieme degli elementi di $A$, costituito da $x$, da $x'$ e da tutti gli elementi di $A$ che seguono $x$ e precedono $x'$.

Dico che l'aggregato $\{X\}$ *è propriamente distribuito su* $A$, quando avviene che, comunque si prendano due elementi di $A$, se uno di questi segue l'altro, non può precederlo. In tal caso, non può sussistere la (3), con $n \geqq 1$, $x^{(0)} \equiv x'$ e $x^{(0)} \not\equiv x^{(1)}$.

Chiamo *variazione totale della funzione metrica* $f(x)$, *competente al passaggio* dall'elemento $x$ di $A$ all'elemento $x'$, del pari di $A$, che lo segue, su $\{X\}$, oppure nell'arco $\text{arc}_A(x, x')$ (su $\{X\}$), e la indico col simbolo

$$v_f(x, x') \,(\text{su } \{X\}), \tag{5}$$

l'estremo superiore dell'insieme numerico descritto dalla somma

$$\sigma = \sum_{k=1}^{\nu+1} d[f(x^{(k-1)}), f(x^{(k)})],$$

ove $x^{(0)} \equiv x$ e $x^{(\nu+1)} \equiv x'$, al variare, in tutti i modi possibili, del numero intero $\nu$, positivo o nullo, e degli elementi $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(\nu)}$ di $A$, per i quali si abbia sempre, su $\{X\}$,

$$x \equiv x^{(0)} \to x^{(1)} \to x^{(2)} \to \cdots \to x^{(\nu)} \to x^{(\nu+1)} \equiv x'.$$

Chiamo, infine, *variazione totale della funzione* $f(x)$ $(\text{su } \{X\})$ *nell'insieme* $A$ e la indico col simbolo

$$v_f(A) \ (\text{su } \{X\}), \tag{6}$$

l'estremo superiore dell'insieme numerico descritto da $v_f(x, x')$, al variare di $x$ e $x'$ in $A$, essendo sempre $x \to x'$, cioè l'estremo superiore dell'insieme delle variazioni totali di $f(x)$ negli archi di $A$ $(\text{su } \{X\})$.

Quando non ci sia pericolo di ambiguità sopprimerò, nei simboli (2), (4), (5) e (6), la scrittura affissa $(\text{su } \{X\})$.

Evidentemente: $v_f(A)$ *è anche l'estremo superiore dell'insieme numerico descritto dalla somma*

$$\sigma = \sum_{k=1}^{\nu} d\,[f(x^{(k-1)}), f(x^{(k)})],$$

*al variare, comunque, del numero naturale* $\nu$ *e degli elementi* $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(\nu)}$ *di* $A$, *in modo che sia sempre* $x^{(0)} \to x^{(1)} \to \cdots \to x^{(\nu)}$.

Sussiste il teorema:

I. *Se, per gli elementi* $x, x', x''$ *di* $A$, *è*

$$x \to x' \to x'',$$

*risulta*

$$v_f(x, x'') \leqq v_f(x, x') + v_f(x', x''),$$

*e se l'aggregato* $\{X\}$ *è propriamente distribuito, su* $A$,

$$v_f(x, x'') = v_f(x, x') + v_f(x', x'').$$

**2.** LUNGHEZZA DI UN INSIEME DI UNO SPAZIO METRICO E SUA SEMICONTINUITÀ INFERIORE. Il coinsieme $G$ della funzione $f(x)$, relativo ad un sottoinsieme $B$ di $A$, sarà detto *un insieme di* $U$, *di equazione* (1) *e di base* $B$. Indicato con $F$ l'insieme di $U$, di equazione (1) e di base $A$, presi due elementi $f(x)$ e $f(x')$ di $F$, si dirà $f(x')$ *seguente a* $f(x)$ $(\text{su } \{X\})$, e si scriverà

$$f(x) \to f(x') \ (\text{su } \{X\}), \tag{7}$$

se è $x \to x'$ $(\text{su } \{X\})$. Presi due elementi $f(x)$ e $f(x')$ di $F$, verificanti la (7), si dirà *arco di* $F$, *di origine* $f(x)$ *e termine* $f(x')$ e si denoterà con uno dei simboli

$$\text{arc}_F(x, x') \ (\text{su } \{X\}), \qquad \text{arc}\,[f(x), f(x')] \ (\text{su } \{X\}),$$

il sottoinsieme di $F$ avente per equazione la (1) e per base l'arco $\text{arc}_A(x, x')$ $(\text{su } \{X\})$. Un arco di $F$, di origine $f(x)$ e termine $f(x')$, è costituito da $f(x)$, da $f(x')$ e da tutti gli elementi di $F$ che seguono $f(x)$ e precedono $f(x')$.

La variazione totale di $f(x)$ nell'insieme $A$ $(\text{su } \{X\})$ sarà detta *lunghezza* dell'insieme $F$ $(\text{su } \{X\})$ ed indicata col simbolo

$$\text{lungh}\, F(\text{su } \{X\}),$$

e quella nell'arco $\operatorname{arc}_A(x, x')$, *lunghezza dell'arco di* $F$ *di origine* $f(x)$ *e termine* $f(x')$ e indicata con uno dei simboli

$$\operatorname{lungh}\operatorname{arc}_F(x, x')\ (\text{su}\ \{X\}), \qquad \operatorname{lungh}\operatorname{arc}[f(x), f(x')]\ (\text{su}\ \{X\}).$$

Si ha dunque, per definizione,

$$\operatorname{lungh} F(\text{su}\ \{X\}) = v_f(A)\ (\text{su}\ \{X\}), \tag{8}$$

$$\operatorname{lungh}\operatorname{arc}[f(x), f(x')]\ (\text{su}\ \{X\}) = v_f(x, x')\ (\text{su}\ \{X\}), \tag{9}$$

ed evidentemente che: *La lunghezza dell'insieme* $F$ *è l'estremo superiore dell'insieme delle lunghezze dei suoi archi.*

In virtù del teorema I si ha il seguente.

II. *Preso un arco di* $F$, *di origine* $f(x^{(0)})$ *e termine* $f(x')$, *ogni suo elemento* $f(x)$, *diverso dall'origine e dal termine, decompone l'arco nei due*

$$\operatorname{arc}[f(x^{(0)}), f(x)], \qquad \operatorname{arc}[f(x), f(x')],$$

*avendosi*

$$\operatorname{lungh}\operatorname{arc}[f(x^{(0)}), f(x')] \leqq \operatorname{lungh}\operatorname{arc}[f(x^{(0)}), f(x)] + \operatorname{lungh}\operatorname{arc}[f(x), f(x')]$$

*e se l'aggregato* $\{X\}$ *è propriamente distribuito su* $A$,

$$\operatorname{lungh}\operatorname{arc}[f(x^{(0)}), f(x')] = \operatorname{lungh}\operatorname{arc}[f(x^{(0)}), f(x)] + \operatorname{lungh}\operatorname{arc}[f(x), f(x')].$$

Fissato un insieme $G_0$, di equazione $u = f_0(x)$, avente per base un sottoinsieme $B$ di $A$, si dirà *intorno di* $G_0$ *di parametro* $\varrho$ e lo si indicherà col simbolo

$$I(G_0, \varrho),$$

la totalità degli insiemi $G$, di equazione $u = f(x)$, aventi la stessa base $B$, per i quali riesce

$$d[f_0(x), f(x)] < \varrho, \quad \text{per} \quad x \in B\ ^{4}).$$

Ciò posto possiamo enunciare e dimostrare i teoremi seguenti.

III. *La lunghezza dell'insieme* $F$, *definito dalla* (8), *è funzione di* $F$, *semicontinua inferiormente.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $F_0$ un arbitrario insieme di $U$, avente per equazione $u = f_0(x)$ e base $A$ e sia $\lambda$ un numero minore di $\operatorname{lungh} F$ e quindi un numero arbitrario quando la lunghezza di $F_0$ fosse infinita. Fissato, a piacere, un numero positivo $\varepsilon$, tale che si abbia $\lambda + \varepsilon < \operatorname{lungh} F_0$, siano $x^{(0)}(\varepsilon)$, $x^{(1)}(\varepsilon)$, ..., $x^{[n(\varepsilon)]}(\varepsilon)$ punti di $A$, per i quali si abbia

$$\sum_{k=1}^{n} d[f_0(x^{(k-1)}), f_0(x^{(k)})] > \lambda + \varepsilon, \tag{9}$$

$$x^{(0)} \to x^{(1)} \to \cdots \to x^{(n)}.$$

---

4) Può darsi ovviamente, che con questa definizione di intorno per gl'insiemi $G$ di $U$, aventi una *fissata* base $B$, la totalità di questi insiemi costituisca uno spazio di HAUSDORFF, ma, per il seguito, non è necessario che ciò avvenga.

Per ogni insieme $F$, di equazione $u=f(x)$ e di base $A$, appartenente all'intorno $I(F_0, \varrho)$, si ha:

$$d[f(x^{(k-1)}), f(x^{(k)})]$$
$$\geqq d[f_0(x^{(k-1)}), f_0(x^{(k)})] - d[f_0(x^{(k-1)}), f(x^{(k-1)})] - d[f_0(x^{(k)}), f(x^{(k)})] >$$
$$> d[f_0(x^{(k-1)}), f_0(x^{(k)})] - 2\varrho$$

e quindi

$$\sum_{k=1}^{n} d[f(x^{(k-1)}), f(x^{(k)})] > \sum_{k=1}^{n} d[f_0(x^{(k-1)}), f_0(x^{(k)})] - 2n\varrho,$$

donde, in base alla (9),

$$\text{lungh}\, F \geqq \sum_{k=1}^{n} d[f(x^{(k-1)}), f(x^{(k)})] > \lambda + \varepsilon - 2n\varrho,$$

e pertanto $\text{lungh}\, F > \lambda$, se si assume $\varrho < \varepsilon/[2n(\varepsilon)]$.

IV. *La lunghezza di un arco di $F$ è funzione, dell'arco, semicontinua inferiormente. Se l'aggregato $\{X\}$ è propriamente distribuito su $A$, comunque si fissi un arco di $F$, di lunghezza finita, la semicontinuità inferiore dei suoi sottoarchi è uniforme.*

DIMOSTRAZIONE. La prima parte del teorema afferma quanto è stato stabilito dal teorema precedente, nel caso particolare che $A$ si riduca ad un arco. Possiamo, dunque, limitarci a dimostrare la seconda parte. Sia $C_0$ un arco, di equazione $u=f_0(x)$, avente lunghezza finita, dobbiamo dimostrare che, comunque si assuma un numero positivo $\varepsilon$, ne esiste un altro $\varrho_\varepsilon$ tale che, per ogni sottoarco $\overline{C}_0$ di $C_0$, riesce

$$\text{lungh}\, C > \text{lungh}\, \overline{C}_0 - \varepsilon, \tag{10}$$

comunque si assuma l'arco $C$ in $I(\overline{C}_0, \varrho_\varepsilon)$.

Siano $f_0(x^{(0)})$ e $f_0(x')$, rispettivamente, l'origine e il termine di $C_0$ e si abbia

$$\sum_{k=1}^{n} d[f_0(x^{(k-1)}), f_0(x^{(k)})] > \text{lungh}\, C_0 - \frac{\varepsilon}{2},$$

con

$$x^{(0)} \to x^{(1)}(\varepsilon) \to x^{(2)}(\varepsilon) \to \cdots \to x(\varepsilon)^{[n(\varepsilon)-1]} \to x(\varepsilon)^{[n(\varepsilon)]} \equiv x'.$$

Siano $f_0(\xi^{(0)})$ e $f_0(\xi')$ l'origine e il termine di un sottoarco $\overline{C}_0$ di $C_0$ e si abbia, per esempio,

$$x^{(\mu)} \to \xi^{(0)} \to x^{(\mu+1)}, \qquad x^{(\nu)} \to \xi' \to x^{(\nu+1)},$$

con $0 < \mu,\ \mu+1 \leqq \nu,\ \nu+1 \leqq n$. Posto

$$\eta^{(k)} = x^{(k)}, \quad \text{per} \quad 0 \leqq k \leqq \mu,$$
$$\eta^{(\mu+1)} = \xi^{(0)},$$
$$\eta^{(k+1)} = x^{(k)}, \quad \text{per} \quad \mu+1 \leqq k \leqq \nu,$$
$$\eta^{(\nu+2)} = \xi',$$
$$\eta^{(k+2)} = x^{(k)}, \quad \text{per} \quad \nu+1 \leqq k \leqq n,$$

risulta:

$$\sum_{k=1}^{n+2} d[f_0(\eta^{(k-1)}), f_0(\eta^{(k)})] \geqq \sum_{k=1}^{n} d[f_0(x^{(k-1)}), f_0(x^{(k)})] > \text{lungh } C_0 - \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{\mu+1} d[f_0(\eta^{(k-1)}), f_0(\eta^{(k)})] \leqq \text{lungh arc}[f_0(x^{(0)}), f_0(\xi^{(0)})],$$

$$\sum_{k=\nu+3}^{n+2} d[f_0(\eta^{(k-1)}), f_0(\eta^{(k)})] \leqq \text{lungh arc}[f_0(\xi'), f_0(x')],$$

e quindi, sottraendo, membro a membro, dalla prima di queste relazioni, quella ottenuta sommando membro a membro le ultime due,

$$\sum_{k=\mu+2}^{\nu+2} d[f_0(\eta^{(k-1)}), f_0(\eta^{(k)})] > \text{lungh } \overline{C}_0 - \frac{\varepsilon}{2}, \tag{11}$$

e a questa stessa relazione si perverrebbe se $\xi^{(0)}$ o $\xi'$ o entrambi coincidessero con uno degli elementi $x^{(k)}$ o appartenessero ad uno stesso fra gli archi $\text{arc}_A(x^{(k-1)}, x^{(k)})$.

Sia ora $\varrho_\varepsilon$ un arbitrario numero positivo minore di $\varepsilon/[4n(\varepsilon)]$ e prendiamo un arco $C$ dell'intorno $I(\overline{C}_0, \varrho_\varepsilon)$, si ha:

$$\text{lungh } C \geqq \sum_{k=\mu+2}^{\nu+2} d[f(\eta^{(k-1)}), f(\eta^{(k)})] > \sum_{k=\mu+2}^{\nu+2} d[f_0(\eta^{(k-1)}), f_0(\eta^{(k)})] - 2n(\varepsilon)\,\varrho_\varepsilon,$$

e quindi la (10), in virtù della (11).

**3.** Esempio. Rappresentino:

$A$ un intervallo aperto, di estremi inferiore $a\,(\geqq -\infty)$ e superiore $a'\,(a' \leqq +\infty)$ dell'asse reale $x$;

$y$ un punto di uno spazio euclideo $S$;

$E$ un insieme lebesghiano di punti di $S$;

$V$ uno spazio di Banach;

$\|v\|$ la norma di un elemento $v$ di $V$;

$v = f(x, y)$ una funzione definita nell'insieme $A \times E$, avente coinsieme contenuto in $V$;

$U$ il sottospazio di $V$, delle funzioni $u = f(x, y)$, la cui norma $\|f(x, y)\|$ è, per ogni punto $x$ di $A$, funzione di $y$ sommabile nell'insieme $E$, reso metrico, assumendo, come distanza fra due suoi elementi $f_0(\bar{x}, y)$ e $f(\bar{\bar{x}}, y)$,

$$d[f_0(\bar{x}, y), f(\bar{\bar{x}}, y)] = \int_E \|f_0(\bar{x}, y) - f(\bar{\bar{x}}, y)\|\,\mathrm{d}y; \tag{12}$$

per ogni punto $x^{(0)}$ dell'asse reale $x$, $X(x^{(0)})$ l'insieme dei punti di tale asse le cui ascisse non sono minori di $x^{(0)}$;

per ogni punto $y$ di $E$ e per due punti $x^{(0)}$ e $x'$ di $A$, essendo $x^{(0)} < x'$,

$$v_f(x^{(0)}, x', y) \tag{13}$$

la variazione totale della funzione $f(x, y)$, nell'intervallo $(x^{(0)}, x')$, sull'aggregato $\{X\}$, assumendo come distanza fra i due elementi $f(\bar{x}, y)$ e $f(\bar{\bar{x}}, y)$, essendo $\bar{x}$ e $\bar{\bar{x}}$ due punti di $A$,

$$||f(\bar{x}, y) - f(\bar{\bar{x}}, y)||,$$

cioè l'estremo superiore dell'insieme numerico descritto dalla somma

$$\sum_{k=1}^{\nu+1} ||f(x^{(k-1)}, y) - f(x^{(k)}, y)||,$$

al variare del numero intero $\nu$, positivo o nullo, e dei punti $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(\nu+1)}$, avendosi sempre

$$x^{(0)} < x^{(1)} < x^{(2)} < \cdots < x^{(\nu)} < x^{(\nu+1)} = x'.$$

Si supponga che:

a) per ogni punto $y$ di $E$, la $f(x, y)$ sia funzione continua di $x$ in $A$;

b) per ogni intervallo chiuso $(x^{(0)}, x')$, interno ad $A$, la (13) sia funzione di $y$ sommabile in $E$;

c) per ogni punto $x$ in $A$, la $f(x, y)$ sia un elemento di $U$.

Se si assume, come distanza fra i due elementi $f(\bar{x}, y)$ e $f(\bar{\bar{x}}, y)$, essendo $\bar{x}$ e $\bar{\bar{x}}$ due punti di $A$, quella definita dalla (12), per $f_0 \equiv f$, si trova che:

V. *La variazione totale* $v_f(x^{(0)}, x')$ *della funzione* $f(x, y)$, *nell'intervallo* $(x^{(0)}, x')$ *e sull'aggregato* $\{X\}$, *è data dall'integrale:*

$$v_f(x^{(0)}, x') = \int_E v_f(x^{(0)}, x', y)\, \mathrm{d}\, y. \tag{14}$$

Si può dire di TONELLI questa variazione totale e di JORDAN la $v_f(x^{(0)}, x, y)$ già considerata. La variazione totale di JORDAN della $f(x, y)$, nell'intervallo $A$, sarà quindi data da

$$v_f(A, y) = \lim_{\substack{x^{(0)} \to a \\ x' \to a'}} v_f(x^{(0)}, x', y),$$

e quella di TONELLI da

$$v_f(A) = \lim_{\substack{x^{(0)} \to a \\ x' \to a'}} \int_E v_f(x^{(0)}, x', y)\, \mathrm{d}\, y. \tag{15}$$

Fissato un insieme $G_0$ di elementi di $U$, di equazione $u = f_0(x, y)$, avente per base un insieme $B$ di punti dell'intervallo $A$, dovrà dirsi, ora, intorno $I(G_0, \varrho)$, di $G_0$, di parametro $\varrho$, la totalità degli insiemi $G$, di equazione $u = f(x, y)$, aventi la stessa base $B$, per i quali risulta:

$$\int_E ||f(x, y) - f_0(x, y)||\, \mathrm{d}\, y < \varrho.$$

Ciò precisato, i teoremi III e IV consentono di affermare quanto segue.

*La lunghezza dell'insieme F, avente per equazione* $y=f(x, y)$ *e per base l'intervallo A, definita dall'eguaglianza*

$$\operatorname{lungh} F = \lim_{\substack{x^{(0)} \to a \\ x' \to a'}} \int_E v_f(x^{(0)}, x', y)\, \mathrm{d}y,$$

*è funzione di F semicontinua inferiormente.*

*Variando i punti* $\xi^{(0)}$ *e* $\xi'(\xi^{(0)} < \xi')$ *in un intervallo chiuso* $(x^{(0)}, x')$ *interno ad A, è uniforme la semicontinuità inferiore della lunghezza dell'arco* $\operatorname{arc}_F(\xi^{(0)}, \xi')$, *definita dall'eguaglianza*

$$\operatorname{lungh} \operatorname{arc}_F(\xi^{(0)}, \xi') = \int_E v_f(\xi^{(0)}, \xi', y)\, \mathrm{d}y.$$

*Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, Roma (Italien)*

*(Eingegangen am 26. Oktober 1959)*

AUMANN, G.
Math. Zeitschr. 73, 374/375 (1960)

# Beispiele zur Stabilität und Instabilität von Bewegungen

Herrn OSKAR PERRON zum 80. Geburtstag am 7. Mai 1960 gewidmet

Von

G. AUMANN

A. In Kursvorlesungen über Differentialgleichungen kommen Stabilitätsprobleme nur ganz selten zur Behandlung, obwohl diese eigentlich der reizvollste Gegenstand der ganzen Theorie sind; ein Hinweis auf diese Dinge aber sollte keinesfalls unterbleiben. Ein solcher bereitet keine Schwierigkeit, da Beispiele zur Verfügung stehen, die sich mit elementarsten Mitteln behandeln und überdies auf höchst anschauliche Weise interpretieren lassen. Zwei solche Beispiele seien in der Folge mitgeteilt.

## I. Das Problem der großen und kleinen Fische

In einem Teich leben $x$ große und $y$ kleine Fische. Die großen Fische sind hoch spezialisiert und können sich nur von den kleinen ernähren, dagegen leben die kleinen Fische von irgend welcher anderer, in ausreichendem Maße vorhandenen Nahrung. Bei einer solchen Situation ist es plausibel für die zeitlichen Änderungen der Anzahlen die folgenden Differentialgleichungen anzusetzen:

$$\text{(I)} \qquad \frac{dx}{dt} = -a\,x + b\,x\,y\,, \qquad \frac{dy}{dt} = +c\,y - d\,x\,y$$

mit positiven Konstanten $a, b, c, d$. Die ersten Terme auf den rechten Seiten beschreiben das natürliche Wachstum ohne Anwesenheit des Partners, die zweiten die gegenseitige Beeinflussung. Für ein qualitatives Studium genügt es natürlich das vereinfachte System

$$\text{(I')} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -x(1-y), \\ \dot{y} = y(1-x) \end{cases}$$

zu betrachten.

Bei (I') ist $x=1$, $y=1$ Ruhelage und als solche *stabil* in dem Sinne, daß alle anderen Bewegungen des Systems periodische Umläufe um diese Ruhelage darstellen (Division beider Gleichungen von (I') liefert eine Differentialgleichung für $x$ und $y$ vom trennbaren Typus, die unmittelbar zu integrieren und bequem zu diskutieren ist, siehe Figur 1).

## II. Das Problem des Wettkampfes

Zwei Parteien, von denen jede ohne die andere existieren könnte, treten in Konkurrenz, wobei sie sich gegenseitig proportional dem Produkt ihrer Potentiale $x$ und $y$ schädigen. Dies ergibt für den zeitlichen Ablauf die Differentialgleichungen:

$$\text{(II)} \qquad \frac{dx}{dt} = +a\,x - b\,x\,y, \qquad \frac{dy}{dt} = +c\,x - d\,x\,y$$

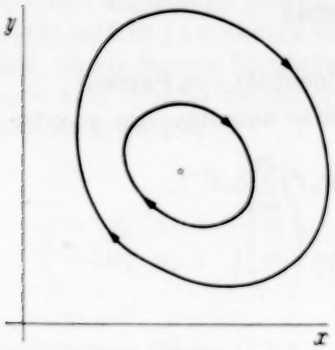


Fig. 1

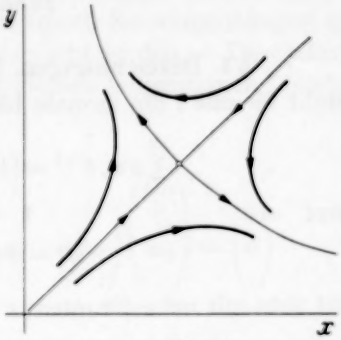


Fig. 2

mit positiven Konstanten $a, b, c, d$. Für das asymptotische Verhalten der Lösungen liefert auch das vereinfachte System

$$\text{(II')} \qquad \begin{cases} \dot{x} = x(1-y) \\ \dot{y} = y(1-x) \end{cases}$$

hinreichende Auskunft.

Bei (II') ist $x=1$, $y=1$ eine *instabile* Ruhelage, wobei (im allgemeinen) jede Abweichung von dieser Gleichgewichtslage entweder $x\to 0$, $y\to+\infty$ oder umgekehrt $x\to+\infty$, $y\to 0$ für $t\to+\infty$ zur Folge hat. Der Nachweis hierfür ist ebenso elementar wie bei I (siehe Fig. 2).

B. Wenn man die Differentialgleichungen (I) und (II) als Modelle für das Zusammenleben von zwei Gesellschaftsklassen oder Völkern akzeptiert, so läßt sich gemäß den obigen Ergebnissen die Frage nach der Stabilität oder Instabilität entsprechender Lebensformen mit Formulierungen beantworten, die für den Politiker nur deshalb ketzerisch klingen, weil er unter Stabilität Konstanz der Spielregeln versteht, der Mathematiker aber (bei fester Spielregel) das Verhalten für $t\to+\infty$ im Auge hat.

*München, Mathematisches Institut der Universität*

*(Eingegangen am 19. Oktober 1959)*

PAASCHE, I.
Math. Zeitschr. 73, 376–381 (1960)

# Zu einer Identität von PERRON

Herrn OSKAR PERRON zum 80. Geburtstag am 7. Mai 1960 gewidmet

Von

IVAN PAASCHE

## § 1. Bezeichnungen. Eine Identität von PERRON

Besteht für alle $t$ die formale Identität in unbestimmten $w_\nu$ oder $\sigma_\nu$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, w_\nu\, t^{\nu-1} = \Big(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} w_\nu\, t^\nu\Big) \sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu\, t^{\nu-1}, \tag{1}$$

abgekürzt

$$w'(t) = w(t)\,\sigma(t), \tag{2}$$

und setzt man mit unbestimmtem $\varepsilon$

$$\frac{1-\varepsilon^\mu}{\mu}\,\frac{\sigma_\nu}{1-\varepsilon^\nu} = \sigma_{\mu\nu}, \tag{3}$$

so gilt die bemerkenswerte Identität von PERRON

$$\begin{vmatrix} w_1 & 1-\varepsilon^1 & & & \\ w_2 & w_1 & 1-\varepsilon^2 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1-\varepsilon^{\nu-1} \\ w_\nu & w_{\nu-1} & \cdot & \cdot & w_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & 1-\varepsilon^1 & & & \\ \sigma_{22} & \sigma_{21} & 1-\varepsilon^2 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1-\varepsilon^{\nu-1} \\ \sigma_{\nu\nu} & \sigma_{\nu,\nu-1} & \cdot & \cdot & \sigma_{\nu 1} \end{vmatrix} \tag{4}$$

$$(\nu = 1, 2, 3, \ldots)\ ^{1}).$$

Unter dem Fall $\nu = 1$ hat man natürlich die von $\varepsilon$ unabhängige Gleichheit $w_1 = \sigma_{11} = \sigma_1$ zu verstehen. Die Identität (4) wird in [1], [2] auf unterschiedliche Art bewiesen, trotz des verwandten Ansatzes $w(t) = V(\varepsilon t)/V(t)$: in [1] ist $V(t) = 1 + \sum V_\nu t^\nu$ ein Polynom in $t$, in [2] dagegen eine unendliche Reihe. Das Polynom führt auf homogene Gleichungen und damit auf verschwindende Determinanten ([1], S. 111), so daß ein die Determinantenidentität herstellender Faktor $f(\varepsilon)$ gesondert zu berechnen ist; vgl. den analogen Faktor in Fußnote 1. Die unendliche Reihe führt auf inhomogene Gleichungen und nichtverschwindende[2]) Determinanten – analog (5), (6) – und liefert den

---

[1]) PERRON schreibt die rechte Determinante

$$\begin{vmatrix} s_1 & 1 & & & \\ s_2 & s_1 & 2 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \nu-1 \\ s_\nu & s_{\nu-1} & \cdot & \cdot & s_1 \end{vmatrix} \frac{1-\varepsilon^1}{1} \cdots \frac{1-\varepsilon^\nu}{\nu},$$

wo also $s_\nu = \dfrac{\sigma_\nu}{1-\varepsilon^\nu}$ ist.

[2]) Die Elemente sind nämlich Unbestimmte oder Funktionen von Unbestimmten.

richtigen Faktor $f(\varepsilon)$ daher von selbst mit. In [1] ist $\varepsilon$ eine gewisse primitive Einheitswurzel, in [2] eine Unbestimmte. Außerdem wird (das war ein Desideratum von PERRON) in [2] die eine Matrix aus (4) durch eine Halbmatrix in die andere übergeführt.

Auch die vorliegende Note beschäftigt sich zunächst mit Beziehungen zwischen den Koeffizienten $w_\nu$ und $\sigma_\nu$ aus (1). Die Determinantengleichheit wird dabei nicht mittels der Potenzen $\varepsilon^\nu$ ein und derselben Größe $\varepsilon$ bewerkstelligt, sondern allgemeiner mittels zweier unabhängiger Folgen $\varepsilon_\nu, \zeta_\nu$. Das Ergebnis (12) wird in § 4 nochmals verallgemeinert. Konvergenzfragen spielen nicht hinein, da nur formale Identitäten untersucht werden. — Die einfachsten Beziehungen sind offenbar die mit (1) äquivalenten inhomogenen Gleichungssysteme für die $\sigma_\nu$ oder $w_\nu$

$$(5)\qquad \begin{pmatrix} -1 w_1 & 1 & & \\ -2 w_2 & w_1 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \cdot \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_1 & -1 & & \\ \sigma_2 & \sigma_1 & -2 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ w_1 \\ w_2 \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \end{pmatrix}$$

und deren Lösungen für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

$$(6)\qquad (-1)^\nu \begin{vmatrix} -1 w_1 & 1 & & \\ -2 w_2 & w_1 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ -\nu w_\nu & w_{\nu-1} & \cdot & w_1 \end{vmatrix} = \sigma_\nu, \qquad \frac{1}{\nu!} \begin{vmatrix} \sigma_1 & -1 & & \\ \sigma_2 & \sigma_1 & -2 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\nu+1 \\ \sigma_\nu & \sigma_{\nu-1} & \cdot & \sigma_1 \end{vmatrix} = w_\nu .$$

Setzt man die beiden Gln. (6) sukzessive ineinander ein, so steigt man zu immer komplizierteren Identitäten auch zwischen den $w_\nu$ allein bzw. $\sigma_\nu$ allein auf (die sich natürlich alle auf $w_\nu = w_\nu$ bzw. $\sigma_\nu = \sigma_\nu$ reduzieren lassen). Das entspricht dem iterierten wechselseitigen Einsetzen der Reihen der $w_\nu$ und $\sigma_\nu$ in den mit (5) oder (6) äquivalenten Potenzreihenidentitäten für alle $t$

$$-\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} (-w_1 t^1 - w_2 t^2 - \cdots)^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sigma_\nu}{\nu} t^\nu$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left( \frac{\sigma_1}{1} t^1 + \frac{\sigma_2}{2} t^2 + \cdots \right)^\nu = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} w_\nu t^\nu ,$$

die wir im Einklang mit (2) abgekürzt

$$(6a)\qquad \ln w(t) = \int \sigma(t)\, dt, \qquad e^{\int \sigma(t)\, dt} = w(t)$$

schreiben. Natürlich ließe sich auch die Abkürzung $\ln w(t) = \int_0^t \sigma(\tau)\, d\tau$ verabreden. Weitere Identitäten ergeben sich, wenn man (6) in (1) einsetzt; ferner, wenn man (1) zuvor beiderseits mit der reziproken Potenzreihe $1/w(t)$ oder $1/\sigma(t)$ usw. multipliziert.

## § 2. Ein Gegenstück zur Identität von PERRON

Setzt man für alle auftretenden Indizes

$$(7) \qquad (\nu + 1 - \varepsilon^{\mu-\nu})\, w_\nu = w_{\mu\nu},$$

so gilt mit den $w_\nu$, $\sigma_\nu$ aus § 1 die weitere Identität

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} \sigma_1 & 1-\varepsilon^1 & & & \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 1-\varepsilon^2 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1-\varepsilon^{\nu-1} \\ \sigma_\nu & \sigma_{\nu-1} & \cdot & \cdot & \sigma_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_{11} & 1-\varepsilon^1 & & & \\ w_{22} & w_{21} & 1-\varepsilon^2 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1-\varepsilon^{\nu-1} \\ w_{\nu\nu} & w_{\nu,\nu-1} & \cdot & \cdot & w_{\nu 1} \end{vmatrix}$$

$$(\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

die aus (4) durch bloßes Vertauschen der Buchstaben $w$ und $\sigma$ entsteht. Dieser Effekt geht jedoch verloren, wenn man gemäß (3), (7) von doppelten zu einfachen Indizes übergeht, weil die $w_\nu$ und $\sigma_\nu$ in (1) nicht vertauschbar sind und die Unbestimmte $\varepsilon$ links und rechts in (4), (8) in Wahrheit gar nicht gleichartig auftritt.

BEWEIS VON (8). Wir kürzen ab $1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} P_\nu t^\nu = P(t)$ und bestimmen die $P_\nu$ so, daß für alle $t$ formal — in Übereinstimmung mit (2) —

$$(9) \qquad \sigma(t) = \frac{w'(t)}{w(t)} = \frac{P(\varepsilon t)}{t\, P(t)} - \frac{1}{t}$$

gilt. Das ist möglich, denn der doppelte Koeffizientenvergleich bei $t^0, t^1, \ldots$ liefert die Gleichungssysteme

$$(10) \qquad \begin{pmatrix} \sigma_1 & 1-\varepsilon^1 & & \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 1-\varepsilon^2 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ P_1 \\ P_2 \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & 1-\varepsilon^1 & & \\ w_{22} & w_{21} & 1-\varepsilon^2 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ P_1 \\ P_2 \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \end{pmatrix}.$$

Hiernach bedeutet (8) nichts weiter als die von uns mittels (9) gesicherte Gleichheit der Lösungen von (10): $(\varepsilon^1 - 1) \ldots (\varepsilon^\nu - 1)\, P_\nu = (\varepsilon^1 - 1) \ldots (\varepsilon^\nu - 1)\, P_\nu$. (8) ist also richtig, qed.

Die vorstehende sehr einfache Beweisanordnung kann nicht unmittelbar, sondern nur nach gewissen Modifikationen auf den Beweis von (4) übertragen werden und ergibt dann den Beweis aus [2].

Natürlich existiert auch hier wieder eine Halbmatrix, welche die eine Matrix aus (8) in die andere transformiert. Nach Fortlassen z. B. der 1. Matrizenspalte dürfen die $w_{\mu\nu}$ dabei sogar ganz beliebig sein. Erst die Hinzunahme der unterdrückten Spalte erfordert die Spezialisierung der $w_{\mu\nu}$ gemäß (7), vgl. [2], S. 119 Mitte.

## § 3. Eine allgemeine Formel

Setzt man mit unbestimmten $\varepsilon_\nu$, $\zeta_\nu$ (wir nennen sie Zusatzkoeffizienten) für alle $t$

$$\frac{w'(t)}{w(t)} = \sigma(t) = \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} P_\nu \varepsilon_\nu t^{\nu-1}}{1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} P_\nu \zeta_\nu t^\nu} \quad (11)$$

[3]),

so läßt sich das Produkt $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu P_\nu$ auf 2 Arten bestimmen: Als Funktion der $w_\nu$ und als Funktion der $\sigma_\nu$. Das ergibt die allgemeine Identität

$$\left\{\begin{vmatrix} 1w_1 & -\varepsilon_1 & & & \\ 2w_2 & (1\zeta_1 - \varepsilon_1)w_1 & -\varepsilon_2 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\varepsilon_{\nu-1} \\ \nu w_\nu & (\overline{\nu-1}\,\zeta_1 - \varepsilon_1)w_{\nu-1} & \cdot & \cdot & (1\zeta_{\nu-1} - \varepsilon_{\nu-1})w_1 \end{vmatrix}\right. \quad (12)$$

$$\left.= \begin{vmatrix} \sigma_1 & -\varepsilon_1 & & & \\ \sigma_2 & \sigma_1\zeta_1 & -\varepsilon_2 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\varepsilon_{\nu-1} \\ \sigma_\nu & \sigma_{\nu-1}\zeta_1 & \cdot & \cdot & \sigma_1\zeta_{\nu-1} \end{vmatrix}\right\} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots),$$

von der (4) jedoch kein Spezialfall ist. Denn (4) basiert auf $w(t) = V(\varepsilon t)/V(t)$ nebst $\sum_{\nu=1}^{\infty} s_\nu t^{\nu-1} = V'(t)/V(t)$, wo also 3 Hilfsreihen mit den Zusatzkoeffizienten $\varepsilon^\nu$, $1^\nu$, $\nu$ im Spiele sind und nicht nur 2 Folgen von Zusatzkoeffizienten $\varepsilon_\nu$, $\zeta_\nu$. Dagegen ist (8) der Spezialfall $\varepsilon_\nu = \varepsilon^\nu - 1$, $\zeta_\nu = 1$ von (12), weil (9) dieser Spezialfall von (11) ist. — Auch der Spezialfall $\varepsilon_\nu = -\nu$, $\zeta_\nu = 1$ von (12) ist interessant:

$$\nu! \begin{vmatrix} w_1 & 1 & & & \\ w_2 & w_1 & 1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ w_\nu & w_{\nu-1} & \cdot & \cdot & w_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & & & \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 2 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \nu-1 \\ \sigma_\nu & \sigma_{\nu-1} & \cdot & \cdot & \sigma_1 \end{vmatrix} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots). \quad (13)$$

Er läßt sich nämlich außer durch $w'(t)/w(t) = \sigma(t) = -P'(t)/P(t)$ mit hierdurch eindeutig bestimmtem $P(t) = 1 + \sum P_\nu t^\nu$ auch noch wie folgt beweisen: wir führen die Bezeichnung $w_\nu = w_\nu(\varepsilon)$ ein und setzen wiederum $\sigma_\nu = (1 - \varepsilon^\nu)s_\nu$ mit von $\varepsilon$ unabhängigen willkürlichen $s_\nu$. Durch die Substitution $\varepsilon \to (1/\varepsilon)$, $t \to \varepsilon t$ geht $V(\varepsilon t)/V(t) = 1 + \sum w_\nu(\varepsilon) t^\nu$ über in $V(t)/V(\varepsilon t) = 1 + \sum w_\nu(1/\varepsilon)\varepsilon^\nu t^\nu$, d.h. in die reziproke Potenzreihe in $t$. Das Produkt 1 der linken Seiten kann also mit dem Produkt der rechten Seiten verglichen werden. Die Cramersche

[3]) Die $P_\nu$ aus § 2 sind ein Spezialfall dieser allgemeineren $P_\nu$.

Regel liefert sodann

$$(14)\qquad w_\nu\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)=(-\varepsilon)^{-\nu}\begin{vmatrix} w_1 & 1 & & \\ w_2 & w_1 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & 1 \\ w_\nu & w_{\nu-1} & \cdot\ \cdot & w_1 \end{vmatrix} \qquad (\nu=1,2,3,\ldots).$$

Dies vergleichen wir mit dem in (6) berechneten $w_\nu(\varepsilon)$, das wir in der Gestalt

$$(15)\qquad w_\nu\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)=\frac{1}{\nu!}\begin{vmatrix} (1-\varepsilon^{-1})\,s_1 & -1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\nu+1 \\ (1-\varepsilon^{-\nu})\,s_\nu & \cdot & \cdot & (1-\varepsilon^{-1})\,s_1 \end{vmatrix} \qquad (\nu=1,2,3,\ldots)$$

schreiben. Zieht man hier aus Zeile $1,\ldots,\nu$ bzw. $-\varepsilon^{-1},\ldots,-\varepsilon^{-\nu}$ als Faktor heraus, und aus Spalte $2,\ldots,\nu$ sodann bzw. $\varepsilon^1,\ldots,\varepsilon^{\nu-1}$, so lautet (15)

$$(16)\qquad w_\nu\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)=\frac{(-\varepsilon)^{-\nu}}{\nu!}\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & & \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 2 & \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \nu-1 \\ \sigma_\nu & \sigma_{\nu-1} & \cdot\ \cdot & \sigma_1 \end{vmatrix} \qquad (\nu=1,2,3,\ldots).$$

Gleichsetzen der $w_\nu(1/\varepsilon)$ aus (14) und (16) ergibt die Identität (13), die damit abermals bewiesen ist. — Die Größe $\varepsilon$ wurde nur zum Beweis herangezogen; die Identität (13) ist unabhängig von $\varepsilon$, da es nachträglich auf $\sigma_\nu=(1-\varepsilon^\nu)\,s_\nu$ gar nicht mehr ankommt. — Ein kurzer 3. Beweis von (13) folgt aus (6) und der nach (6a) evidenten Formel $1/w(t)=e^{\int-\sigma(t)\,dt}$.

## § 4. Verallgemeinerung der Potenzreihen in (11)

Aus dem allgemeinen Ansatz für alle $t$

$$(17)\qquad \frac{\sum w_\nu\alpha_\nu t^\nu}{\sum w_\nu\beta_\nu t^\nu}=\frac{\sum\sigma_\nu\gamma_\nu t^\nu}{\sum\sigma_\nu\delta_\nu t^\nu}=\frac{\sum P_\nu\varepsilon_\nu t^\nu}{\sum P_\nu\zeta_\nu t^\nu}$$

$$\left(\sum=\sum_{\nu=0}^{\infty};\quad w_0=\sigma_0=P_0=1;\quad \frac{\alpha_0}{\beta_0}=\frac{\gamma_0}{\delta_0}=\frac{\varepsilon_0}{\zeta_0}\right)^{4}),$$

mit 6 willkürlichen Zusatzfolgen $\alpha_\nu$, $\beta_\nu$, $\gamma_\nu$, $\delta_\nu$, $\varepsilon_\nu$, $\zeta_\nu$ kann jede der 3 Folgen $w_\nu$, $\sigma_\nu$, $P_\nu$ eindeutig als Funktion jeder der beiden anderen berechnet werden. Sind die $w_\nu$ oder $\sigma_\nu$ unbestimmt, so liefert (17) eine Verallgemeinerung von (11), (12): Setzt man abkürzend

$$(18)\qquad \begin{vmatrix}\alpha_\nu & \varepsilon_\mu\\ \beta_\nu & \zeta_\mu\end{vmatrix} w_\nu = w_{\nu+\mu,\nu} \qquad \begin{vmatrix}\gamma_\nu & \varepsilon_\mu\\ \delta_\nu & \zeta_\mu\end{vmatrix}\sigma_\nu=\sigma_{\nu+\mu,\nu}\ ^{4}),$$

[4]) Um die bereits betrachteten Spezialisierungen (9), (11) usw. der $\alpha_\nu,\ldots,\zeta_\nu$ bequem mitzuerfassen und einen Vergleich mit dem ein wenig entfernteren Fall (4) zu ermöglichen, wollen wir auch hier die Buchstaben $w_\nu$, $\sigma_\nu$, $w_{\mu\nu}$, $\sigma_{\mu\nu}$, $P_\nu$ verwenden. Verwechslungen mit den speziellen Größen sind nicht zu befürchten.

so folgt aus (17)

$$(19)\qquad \begin{pmatrix} w_{11} & w_{10} & & \\ w_{22} & w_{21} & w_{20} & \\ . & . & . & . \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ P_1 \\ P_2 \\ . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{10} & & \\ \sigma_{22} & \sigma_{21} & \sigma_{20} & \\ . & . & . & . \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ P_1 \\ P_2 \\ . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \end{pmatrix}.$$

Da wir es hier mit Unbestimmten zu tun haben, sind von selbst alle $w_{\nu 0} \neq 0$ und alle $\sigma_{\nu 0} \neq 0$. Die hiernach mögliche doppelte Darstellung von $P_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) als Determinante liefert eine Identität zwischen den $w_\nu$ und $\sigma_\nu$ aus (17), deren Allgemeinheit in der Willkür der Wahl der Zusatzfolgen $\varepsilon_\nu, \zeta_\nu$ besteht. — Über die gegenseitige Transformierbarkeit der beiden Matrizen aus (19) mittels einer Halbmatrix gilt wiederum das am Ende von §2 Gesagte, wobei die nur wegen der schließlich wieder hinzugenommenen unterdrückten Spalte notwendigen Spezialisierungen der $w_{\mu\nu}$ bzw. $\sigma_{\mu\nu}$ — oben (3) und (7) — durch (18) gegeben sind.

## Literatur

[1] PERRON, O.: Über Potenzsummen. Math. Z. **64**, 103–114 (1956). — [2] PAASCHE, I.: Bemerkung zu einem Desideratum von PERRON. Math. Z. **66**, 117–120 (1956).

*(13b) Stockdorf (Landkr. Starnberg), Kobellstr. 1*

*(Eingegangen am 1. Oktober 1959)*

STEUERWALD, R.
Math. Zeitschr. 73, 382–385 (1960)

# Über die Gleichung $x^2 - D y^2 = C z$

Herrn OSKAR PERRON zum 80. Geburtstag am 7. Mai 1960 gewidmet

Von

RUDOLF STEUERWALD

I. In dieser Note bedeuten alle lateinischen Buchstabenzeichen ganze rationale Zahlen (bekannte oder gesuchte); außerdem soll $D$ niemals das Quadrat einer solchen Zahl sein.

Für die nichttriviale Lösbarkeit der diophantischen Gleichung

$$x^2 - D y^2 = C z \tag{1}$$

mit den Unbekannten $x, y, z$ ist dann notwendig und hinreichend, daß $C \neq 0$ und die Kongruenz

$$u^2 \equiv D \pmod{C} \tag{2}$$

erfüllbar ist. Manchmal wären aber gerade diejenigen Lösungen der Gl. (1) erwünscht, bei welchen $|z|$ den kleinstmöglichen positiven Wert hat. Leider kennt man kein Rezept, um diese immer zu finden. Aber man kann wenigstens das Lösungsverfahren in jedem Fall so einrichten, daß sich eine nur von $D$ abhängige obere Schranke für den kleinsten erreichbaren Wert von $|z|$ angeben läßt. Das soll hier gezeigt werden.

II. Zugrunde gelegt wird dabei die folgende Methode zur Behandlung der Gl. (1), die Herr O. PERRON in seiner Vorbemerkung zu der unter V. zitierten Arbeit skizziert hat.

Nach Vorgabe einer beliebigen Folge $b_0, b_1, \ldots$ sind zwei weitere Folgen $P_0, P_1, \ldots$ und $Q_0, Q_1, \ldots$ durch die Rekursionsformeln

$$P_{n+1} = b_n Q_n - P_n \tag{3}$$

$$D - P_{n+1}^2 = Q_n Q_{n+1} \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{4}$$

eindeutig bestimmt, sobald die Anfangswerte $P_0$, $Q_0$ bekannt sind und der Bedingung

$$P_0^2 \equiv D \pmod{Q_0} \tag{5}$$

genügen. Führt man unter eindeutiger Verfügung über die Wurzel die Bezeichnungen

$$\xi_n = \frac{\sqrt{D} + P_n}{Q_n} \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{6}$$

ein, so kann man (3) und (4) zusammenfassen zu

$$\xi_n = b_n + \frac{1}{\xi_{n+1}}. \tag{7}$$

Sind ferner $A_n$, $B_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ die Näherungszähler und -nenner des Kettenbruches

$$b_0 + \frac{1}{|b_1|} + \frac{1}{|b_2|} + \cdots, \tag{8}$$

so besteht das Gleichungssystem

$$\xi_0 = \frac{A_{n-1}\xi_n + A_{n-2}}{B_{n-1}\xi_n + B_{n-2}} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Dieses zerfällt durch Trennung von Rationalem und Irrationalem in die Formeln

$$D B_{n-1} + P_0(P_n B_{n-1} + Q_n B_{n-2}) = Q_0(P_n A_{n-1} + Q_n A_{n-2}),$$
$$P_n B_{n-1} + Q_n B_{n-2} = Q_0 A_{n-1} - P_0 B_{n-1},$$

mittels deren man leicht verifiziert

$$(Q_0 A_{n-1} - P_0 B_{n-1})^2 - D B_{n-1}^2 = (-1)^n Q_0 Q_n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Setzt man hierin $Q_0 = \pm C$, und $P_0$ gleich einer als bekannt vorauszusetzenden Wurzel der Kongruenz (2), so hat man Lösungen der Gl. (1) mit $|z| = |Q_n|$.

III. Was man bei der beschriebenen Methode noch variieren kann, ist die Folge $b_0, b_1, \ldots$ Man wird also versuchen, diese so zu wählen, daß man zu der angekündigten oberen Schranke für $\min |z| = \min |Q_n|$ gelangt.

Ist $D > 0$, so liegt es nahe, auch $\sqrt{D} > 0$ zu vereinbaren und zu definieren:

$$b_n = [\xi_n], \tag{10}$$

wo, wie üblich, $[\xi]$ die größte ganze Zahl $\leqq \xi$ bedeuten soll. Dann ist (8) einfach der periodische regelmäßige Kettenbruch für $\xi_0$. Beginnt dessen erste Periode mit $b_h$, so sind bekanntlich für $n \geqq h$ alle Zahlen $\xi_n$ reduziert, d.h. es gelten von da ab die Ungleichungen

$$0 < \sqrt{D} - P_n < Q_n < \sqrt{D} + P_n, \tag{11}$$

aus denen mittels (4)

$$\min |Q_n| \leqq \sqrt{D-1} \tag{12}$$

als die gewünschte Schranke folgt. Diese läßt sich aber, wenn $D$ nicht unbequem groß ist, von Fall zu Fall leicht noch verschärfen. Da es nämlich wegen (11) zu jeder gegebenen zulässigen Zahl $D$ nur endlich viele mit (4) verträgliche reduzierte Zahlen der Gestalt (6) gibt, kann man diese jeweils aufsuchen und für jede Klasse $\mathfrak{K}$ äquivalenter Zahlen $\min Q_n = m_{\mathfrak{K}}$ bestimmen. Da bei jeder Entwicklung (7) mit (10) alle Zahlen einer und nur einer Klasse auftreten, ist $\max m_{\mathfrak{K}}$ obere Schranke für $|z|$. Von den 43 zulässigen Zahlen $D \leqq 50$ liefern z. B. 14 lediglich eine einzige Klasse mit $m_{\mathfrak{K}} = 1$; bei 20 weiteren (darunter 13; vgl. V.) kommt dazu nur noch je eine zweite mit $m_{\mathfrak{K}} = 2$; und auch bei den restlichen 9 ist stets $m_{\mathfrak{K}} \leqq 4$.

IV. Interessanter, weil vom Vorzeichen von $D$ unabhängig, sind folgende Ergebnisse:

$$\min|Q_n| \leqq \frac{|D|+1}{2}, \quad \text{wenn} \quad \left|b_n - \frac{P_n}{Q_n}\right| < 1; \tag{13}$$

$$\min|Q_n| \leqq 2\sqrt{\frac{|D|}{3}}, \quad \text{wenn} \quad \left|b_n - \frac{P_n}{Q_n}\right| \leqq \frac{1}{2}. \tag{14}$$

Demnach gilt (13), wenn man $b_n = \left[\frac{P_n}{Q_n}\right]$ oder $b_n = -\left[-\frac{P_n}{Q_n}\right]$ wählt, wobei man zwischen diesen beiden Möglichkeiten auch abwechseln darf, (14) dagegen, wenn man $b_n$ gleich dem (bzw. im Ausnahmefall einem beliebigen der beiden) nächsten Ganzen an $\frac{P_n}{Q_n}$ setzt.

Beweis von (13). Aus der vorausgesetzten Ungleichung folgt mittels (3) und (4) successive:

$$\left|\frac{P_{n+1}}{Q_n}\right| = \left|b_n - \frac{P_n}{Q_n}\right| < 1, \quad |P_{n+1}| \leqq |Q_n| - 1; \tag{15}$$

$$|Q_{n+1}| = \left|\frac{D - P_{n+1}^2}{Q_n}\right| \leqq \frac{|D| + P_{n+1}^2}{|Q_n|} \leqq \frac{|D|+1}{|Q_n|} - 2 + |Q_n|. \tag{16}$$

Aus (16) schließt man

$$|Q_{n+1}| < |Q_n|, \quad \text{wenn} \quad |Q_n| > \frac{|D|+1}{2}, \tag{17}$$

und daraus, daß diese letztere Schranke einmal erreicht oder unterschritten werden muß, also (13) zutrifft.

Beim Beweis von (14) treten an Stelle von (15) bis (17) die Aussagen

$$|P_{n+1}| \leqq \tfrac{1}{2}|Q_n|; \tag{18}$$

$$|Q_{n+1}| \leqq \left|\frac{D}{Q_n}\right| + \frac{|Q_n|}{4}; \tag{19}$$

$$|Q_{n+1}| < |Q_n|, \quad \text{wenn} \quad |Q_n| > 2\sqrt{\frac{|D|}{3}}, \tag{20}$$

woraus man wieder auf (14) schließt.

Für $D \geqq 5$ ist die Schranke (14) schärfer als (13).

V. Den Anstoß zu den vorstehenden Untersuchungen gab die Arbeit: W. PATZ, *Über die Gleichung* $X^2 - DY^2 = \pm c(2^{31}-1)$, *wo* $c$ *möglichst klein*. Sitzgsber. Bayer. Akad. Wiss. 1948, Math.-nat. Kl., S. 21–30.

In dieser wird die unter II. beschriebene Methode mit $C = 2^{31}-1$ und $D = -3, -5, +13$ angewandt und jedesmal der kleinstmögliche Wert von $|z| = c$ erreicht. Ist das Zufall oder aus der – leider nicht klar ersichtlichen – jeweiligen Wahl der Zahlen $b_n$ erklärbar? So etwa fragt Herr O. PERRON in einer Vorbemerkung, mit der er die Arbeit der Akademie vorlegte. Hier die Antwort:

Herr Patz setzt $Q_0 = 2^{31} - 1$, wählt $P_0 < 0$, und gibt für $n \geqq 1$ nur die absoluten Werte $|P_n|$, $|Q_n|$, $|b_n|$ an. Diese lassen sich bis auf einen kleinen, für das Ergebnis belanglosen Rest erklären durch die Annahmen

$$b_n = -[-\xi_n], \quad \text{wenn} \quad D > 0,$$

$$b_n = -\left[-\frac{P_n}{Q_n}\right], \quad \text{wenn} \quad D < 0.$$

Die nämlichen Absolutwerte erhält man aber einfacher, wenn man ceteris paribus $Q_0 = 1 - 2^{31}$ setzt und gleichzeitig definiert:

$$b_n = [\xi_n], \quad \text{wenn} \quad D > 0,$$

$$b_n = \left[\frac{P_n}{Q_n}\right], \quad \text{wenn} \quad D < 0.$$

Dann sind aber die Ergebnisse der vorliegenden Note, insbesondere (12) und (13), anwendbar und machen den sichtlichen Erfolg von Herrn Patz hinreichend plausibel, zumal, wenn man noch die modulo 4 unzulässigen Werte von $c$ jeweils ausschließt.

*(13b) Alzing, Post Bergen 2, Dr.-Liegl-Str. 10*

*(Eingegangen am 19. Februar 1960)*

WIELANDT, H.
Math. Zeitschr. 73, 386–392 (1960)

# Sylowtürme in subnormalen Untergruppen

Herrn OSKAR PERRON zum 80. Geburtstag am 7. Mai 1960 gewidmet

Von
HELMUT WIELANDT

**1.** FRAGESTELLUNG. Schon oft ist die Frage behandelt worden, was man über die arithmetischen Eigenschaften einer endlichen Gruppe sagen kann, wenn man etwas über die arithmetischen Eigenschaften der Faktorgruppen in einer von $\mathfrak{G}$ bis 1 absteigenden Normalreihe (z.B. einer Kompositionsreihe von $\mathfrak{G}$) weiß; eine besonders eingehende Untersuchung verdankt man P. HALL [2]. Im folgenden geht es um eine verwandte Frage: $\mathfrak{G}$ sei das Erzeugnis gegebener subnormaler Untergruppen $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$; welchen Einfluß haben die arithmetischen Eigenschaften der $\mathfrak{G}_\nu$ auf diejenigen von $\mathfrak{G}$? Eine gründliche Untersuchung erscheint lohnend. Man wird damit beginnen, daß man spezielle arithmetische Eigenschaften daraufhin betrachtet, ob sie sich von den $\mathfrak{G}_\nu$ auf $\mathfrak{G}$ übertragen. Das soll im folgenden für eine in mancher Hinsicht besonders interessante Eigenschaft geschehen, nämlich die, daß die Gruppen $\mathfrak{G}_\nu$, kurz gesagt, $\pi$-Hallgruppen mit Sylowtürmen gegebener Anordnung enthalten. Wir denken uns eine Menge $\pi$ von Primzahlen und eine vollständige Ordnung $*$ von $\pi$ gegeben und festgehalten; die Relation $p * q$ lesen wir als „$p$ unterhalb von $q$".

DEFINITION 1.1. *Unter einer $\pi^*$-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$ verstehen wir eine Untergruppe $\mathfrak{G}^*$ von $\mathfrak{G}$, die eine Normalreihe der Gestalt*

$$\mathfrak{P} \leqq \mathfrak{P}\mathfrak{P}' \leqq \mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{P}'' \leqq \cdots \leqq \mathfrak{P}\mathfrak{P}' \ldots \mathfrak{P}^{(k)} = \mathfrak{G}^* \tag{1.2}$$

*besitzt. Dabei bedeutet $\mathfrak{P}$ eine Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ zu demjenigen in $\pi$ auftretenden Primteiler $p$ der Ordnung $|\mathfrak{G}|$, der der unterste bezüglich der Ordnung $*$ ist; $\mathfrak{P}'$ bedeutet eine Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ zum nächsthöheren Primteiler $p'$ von $|\mathfrak{G}|$ in $\pi$, usw. Liegt kein Primteiler von $|\mathfrak{G}|$ in $\pi$, so setzen wir $\mathfrak{G}^* = 1$. Die Normalreihe 1.2 nennen wir im Anschluß an* HUPPERT [3, S. 415] *einen $\pi$-Sylowturm der Anordnung $*$, oder kurz einen $\pi^*$-Turm (von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^*$).*

Bevor wir die Frage untersuchen, ob sich die Eigenschaft, eine $\pi^*$-Hallgruppe zu enthalten, von subnormalen Untergruppen auf ihr Erzeugnis vererbt, stellen wir einige Definitionen und allgemeine Tatsachen über subnormale Untergruppen und Hallgruppen zusammen.

**2.** BEZEICHNUNGEN, HILFSSÄTZE. Im folgenden bedeuten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ stets Untergruppen einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}$ von endlicher Ordnung. Das Erzeugnis von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bezeichnen wir mit $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle$, Normalität von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A} \trianglelefteq \mathfrak{B}$. Kann man $\mathfrak{A}$ von einer Obergruppe $\mathfrak{B}$ aus durch eine absteigende

Normalkette erreichen, so heißt $\mathfrak{A}$ subnormal in $\mathfrak{B}$ und wir schreiben $\mathfrak{A} \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{B}$. $\mathfrak{H}$ heißt eine $\pi$-Gruppe, wenn jeder Primteiler von $|\mathfrak{H}|$ in $\pi$ liegt. Eine $\pi$-Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ heißt eine $\pi$-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$, wenn ihr Index durch keine Primzahl aus $\pi$ teilbar ist. Die in 1.1 definierten $\pi^*$-Hallgruppen sind auch $\pi$-Hallgruppen. Man weiß:

2.1. *Ist* $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{B} \leqq \mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{A} \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{G}$, *so ist* $\mathfrak{A} \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{B}$ [4, (3)].

2.2. *Das Erzeugnis subnormaler Untergruppen* $\mathfrak{G}_\nu$ *von* $\mathfrak{G}$ *ist subnormal in* $\mathfrak{G}$; *in seiner Ordnung gehen nur Primteiler von* $\Pi|\mathfrak{G}_\nu|$ *auf* [4, (10)].

Ferner gilt:

2.3. *Eine subnormale* $\pi$*-Hallgruppe von* $\mathfrak{G}$ *ist normal in* $\mathfrak{G}$ *und enthält alle* $\pi$*-Untergruppen von* $\mathfrak{G}$.

Beweis. Die normale Hülle (das Erzeugnis aller Konjugierten) von $\mathfrak{H}$ ist nach 2.2 eine $\pi$-Untergruppe von $\mathfrak{G}$ und enthält die $\pi$-Hallgruppe $\mathfrak{H}$, stimmt also mit $\mathfrak{H}$ überein: es ist $\mathfrak{H} \trianglelefteq \mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{B}$ eine beliebige $\pi$-Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so ist auch $\mathfrak{H}\mathfrak{B}$ eine $\pi$-Gruppe $\geqq \mathfrak{H}$ und stimmt daher mit $\mathfrak{H}$ überein.

2.4. *Es seien* $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$ *subnormal in* $\mathfrak{G}$, *und es sei* $\mathfrak{H}_\nu$ *eine beliebige Untergruppe von* $\mathfrak{G}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. *Dann enthält der Index des Erzeugnisses* $\langle \mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_n \rangle$ *in* $\langle \mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n \rangle$ *nur Primteiler, die in einem der Indizes* $|\mathfrak{G}_\nu : \mathfrak{H}_\nu|$ *aufgehen* [5, (2.3)].

2.5. *Es sei* $\mathfrak{H}$ *eine* $\pi$*-Hallgruppe von* $\mathfrak{G}$, *und* $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$ *seien subnormal in* $\mathfrak{G}$.

A. *Dann ist* $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_\nu$ *eine* $\pi$*-Hallgruppe von* $\mathfrak{G}_\nu$.

B. *Es ist* $\langle \mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_n \rangle = \mathfrak{H} \cap \langle \mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n \rangle$.

C. *Ist* $\mathfrak{H}$ *eine* $\pi^*$*-Hallgruppe von* $\mathfrak{G}$, *so ist* $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_\nu$ *eine* $\pi^*$*-Hallgruppe von* $\mathfrak{G}_\nu$.

Beweis. Für den Fall, daß $\pi$ aus nur einer Primzahl besteht, sind A und B bekannt [5, (3.1–2)], und C fällt mit A zusammen. Im allgemeinen Fall sei $p$ eine beliebige Primzahl aus $\pi$. Dann gibt es in $\mathfrak{H}$ eine $p$-Sylowgruppe $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$.

A. Da $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_\nu$ die $p$-Sylowgruppe $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{G}_\nu$ von $\mathfrak{G}_\nu$ enthält, tritt im Index von $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_\nu$ in $\mathfrak{G}_\nu$ kein Primteiler aus $\pi$ auf. Andererseits ist $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_\nu$ eine $\pi$-Gruppe, also eine $\pi$-Hallgruppe von $\mathfrak{G}_\nu$.

B. Die Beziehung $\leqq$ ist trivial. Die Beziehung $\geqq$ gilt deswegen, weil die linke Seite für jedes $p \in \pi$ eine $p$-Sylowgruppe der rechten Seite enthält, nämlich $\langle \mathfrak{P} \cap \mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{P} \cap \mathfrak{G}_n \rangle$.

C. Der $\pi^*$-Turm von $\mathfrak{H}$ (nach 2.3 gibt es nur einen) geht beim Schneiden mit $\mathfrak{G}_\nu$ in einen $\pi^*$-Turm von $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_\nu$ über.

2.6. *Je zwei* $\pi^*$*-Hallgruppen von* $\mathfrak{G}$ *sind in* $\mathfrak{G}$ *konjugiert* (P. Hall [2] Th. A 1).

## 3. Der Existenzsatz.

Satz 3.1. *Es seien* $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$ *subnormale Untergruppen von* $\mathfrak{G}$, *welche die ganze Gruppe* $\mathfrak{G}$ *erzeugen. Jedes* $\mathfrak{G}_\nu$ *enthalte eine* $\pi^*$*-Hallgruppe* $\mathfrak{G}_\nu^*$. *Dann enthält* $\mathfrak{G}$ *eine* $\pi^*$*-Hallgruppe* $\mathfrak{G}^*$.

BEWEIS. Wir erledigen zunächst einige Sonderfälle.

A. *$\mathfrak{G}$ sei eine $\pi$-Gruppe. Zu zeigen ist, daß $\mathfrak{G}$ eine Normalkette 1.2 besitzt.* Gibt es keinen Primteiler von $|\mathfrak{G}|$ in $\pi$, so ist $\mathfrak{G}^* = 1$ zu setzen und wir sind fertig. Weiterhin gebe es solche Primteiler; $p$ sei der unterste von ihnen und $\mathfrak{P}$ eine zugehörige Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$. Wir zeigen, daß $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{G}$ normal ist. Der Durchschnitt $\mathfrak{P}_\nu = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{G}_\nu$ ist nach 2.5 eine $p$-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}_\nu$. Nach der Definition 1.1 enthält $\mathfrak{G}_\nu$ eine normale $p$-Sylowgruppe ($=1$, wenn $p$ nicht in $|\mathfrak{G}_\nu|$ aufgeht). Sie ist nach SYLOW zu $\mathfrak{P}_\nu$ konjugiert, daher ist $\mathfrak{P}_\nu \trianglelefteq \mathfrak{G}_\nu$. Da $\mathfrak{G}_\nu \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{G}$ vorausgesetzt ist, folgt $\mathfrak{P}_\nu \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{G}$. Nach 2.2 ist auch $\mathfrak{Q} = \langle \mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n \rangle$ subnormal in $\mathfrak{G}$. Nach 2.5 B ist andererseits $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{G} = \mathfrak{P}$, also ist $\mathfrak{P} \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{G}$. Hieraus folgt nach 2.3 $\mathfrak{P} \trianglelefteq \mathfrak{G}$. Wir gehen zur Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ über. Sie hat eine kleinere Ordnung als $\mathfrak{G}$ und erfüllt wieder die Voraussetzungen von A, also kommen wir durch einen Induktionsschluß bezüglich $|\mathfrak{G}|$ ans Ziel.

B. *Nun sei $n = 2$, $\mathfrak{G}_1 \trianglelefteq \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_2 \trianglelefteq \mathfrak{G}$. Für jede Wahl der $G_\nu \in \mathfrak{G}_\nu$ sei $\langle G_1^{-1} \mathfrak{G}_1^* G_1, G_2^{-1} \mathfrak{G}_2^* G_2 \rangle = \mathfrak{G}$. Über die Ordnung von $\mathfrak{G}$ wird nichts vorausgesetzt. Behauptet wird: $\mathfrak{G}$ ist eine $\pi$-Gruppe und besitzt einen $\pi^*$-Turm.*

Wir bilden $\mathfrak{D} = \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2$; dann ist $\mathfrak{D} \trianglelefteq \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{D} \cong \mathfrak{G}_1/\mathfrak{D} \times \mathfrak{G}_2/\mathfrak{D}$.

Wenn in $|\mathfrak{D}|$ kein Primteiler aus $\pi$ aufgeht, dann enthält $\mathfrak{G}_\nu/\mathfrak{D}$ eine zu $\mathfrak{G}_\nu^*$ isomorphe $\pi^*$-Hallgruppe, nämlich $\mathfrak{G}_\nu^* \mathfrak{D}/\mathfrak{D}$. Also enthält $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ eine zu $\mathfrak{G}_1^* \times \mathfrak{G}_2^*$ isomorphe $\pi^*$-Hallgruppe, nämlich $\mathfrak{G}_1^* \mathfrak{D}/\mathfrak{D} \times \mathfrak{G}_2^* \mathfrak{D}/\mathfrak{D} = \mathfrak{B}/\mathfrak{D}$. Da in $|\mathfrak{D}|$ kein Primteiler aus $\pi$ aufgeht, ist $(|\mathfrak{D}|, |\mathfrak{B}/\mathfrak{D}|) = 1$. Nach einem bekannten Satz von SCHUR und ZASSENHAUS [6, Kap. IV Satz 25] enthält $\mathfrak{B}$ eine zu $\mathfrak{G}_1^* \times \mathfrak{G}_2^*$ isomorphe Vertretergruppe $\mathfrak{G}^*$ zum Normalteiler $\mathfrak{D}$; $\mathfrak{G}^*$ ist eine $\pi^*$-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$. Wir haben noch zu zeigen, daß $\mathfrak{G}$ eine $\pi$-Gruppe, d.h. $= \mathfrak{G}^*$ ist. Dazu genügt es nach der Voraussetzung von B, zu zeigen, daß $\mathfrak{G}^*$ zwei Untergruppen der Gestalt $G_1^{-1} \mathfrak{G}_1^* G_1$, $G_2^{-1} \mathfrak{G}_2^* G_2$ enthält. Untergruppen dieser Art sind aber in der Tat nach 2.5 C und 2.6 die Durchschnitte $\mathfrak{G}^* \cap \mathfrak{G}_\nu$.

Weiterhin können wir also annehmen, daß $|\mathfrak{D}|$ durch eine Primzahl $q \in \pi$ teilbar ist. Wir bilden die beiden Durchschnitte $\mathfrak{D}_\nu^* = \mathfrak{G}_\nu^* \cap \mathfrak{D}$; es ist $\mathfrak{D}_\nu^* \trianglelefteq \mathfrak{G}_\nu^*$. Nach 2.5 ist $\mathfrak{D}_\nu^*$ eine $\pi^*$-Hallgruppe von $\mathfrak{D}$; wegen $|\mathfrak{D}| \equiv 0 \bmod q$, $q \in \pi$ ist also $\mathfrak{D}_\nu^* \neq 1$. Nach 2.6 sind $\mathfrak{D}_1^*$ und $\mathfrak{D}_2^*$ in $\mathfrak{D}$ konjugiert, also gibt es ein $G_2 \in \mathfrak{G}_2$ mit $\mathfrak{D}_1^* = G_2^{-1} \mathfrak{D}_2^* G_2$. Hieraus folgt $\mathfrak{D}_1^* \trianglelefteq \langle \mathfrak{G}_1^*, G_2^{-1} \mathfrak{G}_2^* G_2 \rangle = \mathfrak{G}$. Wir können nun zur kleineren Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}_1^*$ übergehen, die offenbar wieder die Voraussetzungen von B erfüllt und daher schon als $\pi$-Gruppe angenommen werden kann. Da $\mathfrak{D}_1^*$ ebenfalls eine $\pi$-Gruppe ist, ist auch $\mathfrak{G}$ eine solche. Nun zeigt das Ergebnis von A, daß $\mathfrak{G}$ einen $\pi^*$-Turm besitzt, und wir sind auch in diesem Fall fertig.

C. *Wir mildern die Einschränkungen von* B. *Es sei $n = 2$, $\mathfrak{G}_1 \trianglelefteq \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_2 \trianglelefteq \mathfrak{G}$. Behauptung: $\mathfrak{G}$ enthält eine $\pi^*$-Hallgruppe.* Wir konstruieren sie nach einem Minimalprinzip: Unter allen Erzeugnissen $\langle \mathfrak{H}_1^*, \mathfrak{H}_2^* \rangle$, worin $\mathfrak{H}_\nu^*$ alle $\pi^*$-Hallgruppen von $\mathfrak{G}_\nu$ durchläuft, wählen wir irgendein minimales aus; es heiße $\mathfrak{H}$. Wir behaupten, daß $\mathfrak{H}$ eine $\pi^*$-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$ ist. Wir legen die Gruppen $\mathfrak{H}_\nu^*$ so fest, daß $\mathfrak{H} = \langle \mathfrak{H}_1^*, \mathfrak{H}_2^* \rangle$ ist. Es wird $\mathfrak{H}_\nu^* \leqq \mathfrak{H}_\nu \leqq \mathfrak{G}_\nu$, wenn wir die

normale Hülle von $\mathfrak{H}_\nu^*$ in $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{H}_\nu$ bezeichnen. Daher erfüllen $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_\nu$, $\mathfrak{H}_\nu^*$ die Voraussetzungen, die wir in B für $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_\nu$, $\mathfrak{G}_\nu^*$ gemacht haben. Also ist $\mathfrak{H}$ eine $\pi$-Gruppe mit einem $\pi^*$-Turm. Dieser baut sich aus $q$-Sylowgruppen ($q \in \pi$) von $\mathfrak{H}$ auf; aber da nach 2.4 der Index von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$ durch keine Primzahl aus $\pi$ teilbar ist, sind das zugleich Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$. Also ist $\mathfrak{H}$, wie behauptet, eine $\pi^*$-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$.

D. Nun sei $n$ beliebig und $\mathfrak{G}_\nu \trianglelefteq \mathfrak{G}$ für $\nu = 1, \ldots, n$. Dann ergibt ein Induktionsschluß bezüglich $n$, ausgehend von dem eben erledigten Fall $n = 2$, die Existenz von $\mathfrak{G}^*$.

E. Jetzt beweisen wir den Satz 3.1 in voller Allgemeinheit durch einen Induktionsschluß bezüglich $|\mathfrak{G}|$. Dabei können wir annehmen, daß jedes $\mathfrak{G}_\nu \neq \mathfrak{G}$ ist. Dann ist wegen $\mathfrak{G}_\nu \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{G}$ auch die normale Hülle $\mathfrak{N}_\nu$ von $\mathfrak{G}_\nu$ kleiner als $\mathfrak{G}$, daher darf der Satz 3.1 auf $\mathfrak{N}_\nu$ schon angewandt werden. Wir prüfen die Voraussetzungen nach: Es ist $\mathfrak{N}_\nu = \langle \ldots, G^{-1}\mathfrak{G}_\nu G, \ldots \rangle$; nach 2.1 ist $G^{-1}\mathfrak{G}_\nu G \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{N}_\nu$, und $G^{-1}\mathfrak{G}_\nu G$ enthält die $\pi^*$-Hallgruppe $G^{-1}\mathfrak{G}_\nu^* G$. Nach Induktionsvoraussetzung enthält $\mathfrak{N}_\nu$ eine $\pi^*$-Hallgruppe $\mathfrak{N}_\nu^*$. Daher enthält $\mathfrak{G}$ nach dem Ergebnis von D, angewandt auf $\mathfrak{N}_\nu$ statt $\mathfrak{G}_\nu$, eine $\pi^*$-Hallgruppe $\mathfrak{G}^*$. Damit ist Satz 3.1 bewiesen. Als nächstes wollen wir das unter einschränkenden Voraussetzungen verwendete Minimalprinzip auf die allgemeine Situation des Satzes 3.1 erweitern, um näheren Aufschluß über die Gruppen $\mathfrak{G}^*$ zu erhalten.

## 4. Die Minimaleigenschaft von $\mathfrak{G}^*$.

Wir schicken eine Folgerung aus Satz 3.1 voraus:

Satz 4.1. *Es seien $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$ subnormale Untergruppen von $\mathfrak{G}$, welche $\mathfrak{G}$ erzeugen. Sei $\mathfrak{H}$ eine beliebige Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Genau dann enthält $\mathfrak{H}$ eine $\pi^*$-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$, wenn $\mathfrak{H}$ für jedes $\nu$ eine $\pi^*$-Hallgruppe von $\mathfrak{G}_\nu$ enthält.*

Beweis. A. Sei $\mathfrak{G}^* \leqq \mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}^*$ eine $\pi^*$-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{G}^* \cap \mathfrak{G}_\nu$ nach 2.5 C eine $\pi^*$-Hallgruppe von $\mathfrak{G}_\nu$ und in $\mathfrak{H}$ enthalten.

B. Sei $\mathfrak{G}_\nu^* \leqq \mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}_\nu^*$ eine $\pi^*$-Hallgruppe von $\mathfrak{G}_\nu$. Wir setzen $\mathfrak{H}_\nu = \mathfrak{G}_\nu \cap \mathfrak{H}$. Wegen $\mathfrak{G}_\nu \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{G}$ ist $\mathfrak{H}_\nu \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{H}$, ferner ist $\mathfrak{G}_\nu^*$ eine $\pi^*$-Hallgruppe von $\mathfrak{H}_\nu$. Nach 2.4 hat das Erzeugnis $\mathfrak{E} = \langle \mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_n \rangle$ in $\mathfrak{G}$ einen Index, der keinen Primteiler aus $\pi$ enthält. Nach Satz 3.1 besitzt $\mathfrak{E}$ andererseits eine $\pi^*$-Hallgruppe $\mathfrak{E}^*$. Diese ist dann auch eine $\pi^*$-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$.

Wir geben nun eine charakteristische Minimaleigenschaft von $\mathfrak{G}^*$ an.

Satz 4.2. *Es seien $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$ subnormale Untergruppen von $\mathfrak{G}$, die $\mathfrak{G}$ erzeugen. Dann sind die $\pi^*$-Hallgruppen $\mathfrak{G}^*$ von $\mathfrak{G}$ die minimalen unter den Erzeugnissen*

$$\langle \mathfrak{G}_1^*, \ldots, \mathfrak{G}_n^* \rangle, \tag{4.2'}$$

*wenn man $\mathfrak{G}_\nu^*$ alle $\pi^*$-Hallgruppen von $\mathfrak{G}_\nu$ durchlaufen läßt.*

Ist die Menge dieser Erzeugnisse leer, weil eine der Gruppen $\mathfrak{G}_\nu$ keine $\pi^*$-Hallgruppe enthält, so ist die Behauptung des Satzes so zu verstehen, daß dann auch keine $\pi^*$-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$ existiert.

BEWEIS. A. Jede $\pi^*$-Hallgruppe $\mathfrak{G}^*$ von $\mathfrak{G}$ läßt sich in der Form 4.2′ darstellen. Denn der Durchschnitt $\mathfrak{G}_\nu^* = \mathfrak{G}^* \cap \mathfrak{G}_\nu$ ist nach 2.5C eine $\pi^*$-Hallgruppe von $\mathfrak{G}_\nu$, und nach 2.5B ist

$$\langle \mathfrak{G}^* \cap \mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}^* \cap \mathfrak{G}_n \rangle = \mathfrak{G}^* \cap \langle \mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n \rangle = \mathfrak{G}^* \cap \mathfrak{G} = \mathfrak{G}^*.$$

$\mathfrak{G}^*$ enthält keine kleinere Gruppe $\mathfrak{H}$ der Gestalt 4.2′. Denn eine solche müßte nach 4.1 wieder eine $\pi^*$-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$ enthalten, also mindestens die Ordnung $|\mathfrak{G}^*|$ haben.

B. Sei $\mathfrak{H}$ eine minimale Gruppe der Gestalt 4.2′. Da $\mathfrak{H}$ von jedem $\mathfrak{G}_\nu$ eine $\pi^*$-Hallgruppe enthält, enthält $\mathfrak{H}$ nach 4.1 eine $\pi^*$-Hallgruppe $\mathfrak{G}^*$ von $\mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{G}^*$ nach A ebenfalls die Gestalt 4.2′ hat und $\mathfrak{H}$ eine minimale Gruppe dieser Art ist, folgt $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}^*$, also ist $\mathfrak{H}$ eine $\pi^*$-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$.

**5.** HALLGRUPPEN MIT MEHREREN SYLOWTÜRMEN. Wie bisher sei eine Menge $\pi$ von Primzahlen gegeben. Wir wollen aber jetzt nicht nur eine einzelne vollständige Ordnung $*$ von $\pi$ betrachten, sondern eine beliebig gegebene Menge von solchen, etwa $O = \{*, **, \ldots\}$.

DEFINITION 5.1. *Unter einer $\pi^O$-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$ verstehen wir eine $\pi$-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$, die sowohl einen $\pi^*$-Turm wie einen $\pi^{**}$-Turm usw. im Sinne von Definition* 1.1 *besitzt.*

Wir fragen, wann das Erzeugnis subnormaler Untergruppen eine $\pi^O$-Hallgruppe enthält. Zur Vorbereitung beweisen wir die folgende Bemerkung:

HILFSSATZ 5.2. *Es seien $*$ und $**$ vollständige Ordnungen von $\pi$. In $\mathfrak{G}$ gebe es eine $\pi$-Hallgruppe, die sowohl einen $\pi^*$-Turm wie einen $\pi^{**}$-Turm besitzt. Dann sind die $\pi^*$-Hallgruppen von $\mathfrak{G}$ identisch mit den $\pi^{**}$-Hallgruppen von $\mathfrak{G}$.*

BEWEIS. Sei $O = \{*, **\}$, $\mathfrak{G}^O$ eine $\pi^O$-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^*$ eine $\pi^*$-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$. Nach 2.6 sind $\mathfrak{G}^O$ und $\mathfrak{G}^*$ in $\mathfrak{G}$ konjugiert. Daher besitzt $\mathfrak{G}^*$ einen $\pi^{**}$-Turm, ist also auch eine $\pi^{**}$-Hallgruppe. Ebenso ist jede $\pi^{**}$-Hallgruppe zugleich eine $\pi^*$-Hallgruppe.

Dieser Hilfssatz genügt noch nicht, um den Existenzsatz 3.1 auf die $\pi^O$-Hallgruppen zu erweitern; denn aus der Existenz der $\mathfrak{G}_\nu^O$ folgt zunächst nur die Existenz eines $\mathfrak{G}^*$ und eines $\mathfrak{G}^{**}$, woraus auch mit 5.2 noch nicht auf die Existenz von $\mathfrak{G}^O$ geschlossen werden kann. Wenn wir jedoch die kennzeichnende Extremaleigenschaft heranziehen, so folgt aus der Existenz der $\mathfrak{G}_\nu^O$ nach dem Hilfssatz, daß die $\mathfrak{G}_\nu^*$ mit den $\mathfrak{G}_\nu^{**}$ identisch sind. Dann sind aber auch die beiden durch Satz 4.2 gegebenen Darstellungen von $\mathfrak{G}^*$ und $\mathfrak{G}^{**}$ identisch, also ist dann jedes $\mathfrak{G}^*$ zugleich ein $\mathfrak{G}^{**}$, das heißt ein $\mathfrak{G}^O$. Damit können wir die folgende Zusammenfassung und Erweiterung aller bisherigen Ergebnisse aussprechen:

HAUPTSATZ 5.3. *Die endliche Gruppe $\mathfrak{G}$ sei das Erzeugnis subnormaler Untergruppen $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$. Es sei $O$ eine Menge von vollständigen Ordnungen*

*einer gegebenen Menge $\pi$ von Primzahlen. Genau dann enthält $\mathfrak{G}$ eine $\pi^O$-Hallgruppe im Sinne der Definition* 5.1, *wenn jedes $\mathfrak{G}_\nu$ eine $\pi^O$-Hallgruppe enthält. Die $\mathfrak{G}^O$ sind die minimalen unter den Erzeugnissen $\langle \mathfrak{G}_1^O, \ldots, \mathfrak{G}_n^O \rangle$, wenn $\mathfrak{G}_\nu^O$ alle $\pi^O$-Hallgruppen von $\mathfrak{G}_\nu$ durchläuft.*

Wenn eine $\pi$-Gruppe mehrere $\pi$-Sylowtürme besitzt, so sind die möglichen Anordnungen von $\pi$ nicht unabhängig voneinander. Wenn z.B. eine Gruppe der Ordnung $p^\alpha q^\beta r^\gamma$ Sylowtürme zu den drei Anordnungen $(pqr)$, $(qrp)$, $(rpq)$ besitzt, so enthält sie je eine normale $p$-, $q$- und $r$-Sylowgruppe, d.h. sie ist nilpotent; dann aber besitzt sie Sylowtürme zu allen sechs möglichen Anordnungen von $p, q, r$. Als Nebenergebnis dieser Überlegung können wir dem Sonderfall des Hauptsatzes, der durch Aufnahme *aller* Anordnungen von $\pi$ in die Menge $O$ entsteht, die folgende Form geben:

5.4. *In* 5.3 *darf man „$\pi^*$-Hallgruppe" überall durch „nilpotente $\pi$-Hallgruppe" ersetzen.*

Welche Anordnungen von $\pi$-Sylowtürmen bei einer gegebenen $\pi$-Gruppe $\mathfrak{G}$ auftreten können, hat BAER [1] ermittelt. Es sind das diejenigen *vollständigen* Ordnungen von $\pi$, die mit einer durch $\mathfrak{G}$ bestimmten *teilweisen* Ordnung $\sigma$ von $\pi$ verträglich sind. Umgekehrt gibt es zu jeder teilweisen Ordnung $\sigma$ von $\pi$ auch $\pi$-Gruppen, welche die mit $\sigma$ verträglichen Anordnungen von $\pi$-Sylowtürmen gestatten, aber keine andern; es sind dies genau die von BAER eingeführten $\sigma$-verstreuten $\pi$-Gruppen. Ihre nicht ganz kurze Definition findet man z.B. in [1] auf S. 242.

Auf Grund dieses Zusammenhanges läßt sich der Hauptsatz auch als ein Satz über $\sigma$-verstreute Hallgruppen formulieren:

5.5. *In* 5.3 *darf man „$\pi^O$-Hallgruppe" überall durch „$\sigma$-verstreute $\pi$-Hallgruppe" ersetzen, wenn anstelle von $O$ eine teilweise Ordnung $\sigma$ von $\pi$ gegeben ist.*

**6.** DIE ANZAHL DER $\pi^O$-HALLGRUPPEN VON $\mathfrak{G}$. Wieder sei $\mathfrak{G}$ das Erzeugnis subnormaler Untergruppen $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$; $\pi$ sei eine Menge von Primzahlen, $O$ eine Menge von Ordnungen von $\pi$. Wir bezeichnen die Anzahl der verschiedenen $\pi^O$-Hallgruppen von $\mathfrak{G}$ mit $N$, die entsprechende Anzahl für $\mathfrak{G}_\nu$ mit $N_\nu$. Dann können wir den Existenzsatz so aussprechen: Sind alle $N_\nu \neq 0$, so ist $N \neq 0$. Dies legt die Frage nach genaueren Aussagen über den Einfluß der $N_\nu$ auf $N$ nahe. Wir beweisen:

SATZ 6.1. A. *$N$ teilt $|\mathfrak{G}|$; kein Primfaktor von $N$ liegt in $\pi$.*

B. *Es ist $N_\nu | N$ für $\nu = 1, 2, \ldots, n$.*

C. *$N$ enthält genau dieselben Primfaktoren wie $N_1 N_2 \ldots N_n$.*

D. *Es ist $N \leqq N_1 N_2 \ldots N_n$.*

BEWEIS. A. Je zwei $\pi^O$-Hallgruppen $\mathfrak{G}^O$ von $\mathfrak{G}$ sind in $\mathfrak{G}$ konjugiert (2.6). Daher ist $N$ der Index des Normalisators von $\mathfrak{G}^O$ in $\mathfrak{G}$, also ein Teiler von $|\mathfrak{G} : \mathfrak{G}^O|$.

B. Wir können $N>0$ annehmen. Wir verteilen die $N$ $\pi^O$-Hallgruppen von $\mathfrak{G}$ auf Äquivalenzklassen, indem wir die zusammenfassen, die denselben Durchschnitt mit $\mathfrak{G}_\nu$ haben ($\nu$ fest). Die auftretenden Durchschnitte sind $\pi^O$-Hallgruppen von $\mathfrak{G}_\nu$, und zwar treten alle $N_\nu$ derartigen Gruppen wirklich auf, da sie zueinander in $\mathfrak{G}_\nu$ konjugiert sind. Also gibt es genau $N_\nu$ Äquivalenzklassen, und je zwei Klassen sind konjugiert, enthalten also die gleiche Anzahl, etwa $k_\nu$, von $\pi^O$-Hallgruppen von $\mathfrak{G}$. Daher ist $N=k_\nu N_\nu$.

C. Nach B ist jeder Primfaktor von $N_1 N_2 \dots N_n$ auch einer von $N$. Sei nun umgekehrt $p$ eine Primzahl, die in keinem der $N_\nu$ aufgeht; zu zeigen ist, daß $p$ auch nicht in $N$ aufgeht. Die Voraussetzung besagt, daß der Index des Normalisators einer $\pi^O$-Hallgruppe $\mathfrak{H}_\nu^O$ in $\mathfrak{G}_\nu$ nicht durch $p$ teilbar ist. Dann enthält dieser Normalisator eine $p$-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}_\nu$. Multiplizieren wir $\mathfrak{H}_\nu^O$ mit dieser Sylowgruppe, so entsteht eine $\varrho^O$-Hallgruppe von $\mathfrak{G}_\nu$, wenn wir unter $\varrho^O$ die Menge $\pi \cup p$ in denjenigen Anordnungen verstehen, die aus $\pi^O$ durch Hinzufügen von $p$ als höchstem Element entstehen (wir können annehmen, daß $p$ nicht in $\pi$ liegt, da sonst $p$ schon nach A nicht in $N$ aufgeht). Unter unserer Voraussetzung enthält also jedes $\mathfrak{G}_\nu$ eine $\varrho^O$-Hallgruppe, daher enthält nach dem Existenzsatz auch $\mathfrak{G}$ eine solche. Das besagt aber, daß der Normalisator einer $\pi^O$-Hallgruppe $\mathfrak{H}^O$ von $\mathfrak{G}$ eine volle $p$-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ enthält, also ist sein Index $N$ nicht durch $p$ teilbar.

D. Jede $\pi^O$-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$ läßt sich nach 5.3 auf mindestens eine Art in der Form $\mathfrak{H}^O=\langle \mathfrak{H}_1^O, \dots, \mathfrak{H}_n^O \rangle$ darstellen. Also ist die Anzahl $N$ der verschiedenen Gruppen $\mathfrak{H}^O$ höchstens gleich der Anzahl $N_1 N_2 \dots N_n$ der verschiedenen $n$-tupel $\mathfrak{H}_1^O, \dots, \mathfrak{H}_n^O$. Damit ist der Beweis des Satzes 6.1 beendet.

Die Aussagen 6.1 C und D legen die Vermutung nahe, daß $N$ ein Teiler von $N_1 N_2 \dots N_n$ ist. Doch scheinen die bisher entwickelten Hilfsmittel zum Beweis nicht auszureichen.

## Literatur

[1] BAER, R.: Sylowturmgruppen. Math. Z. **69**, 239–246 (1958). — [2] HALL, P.: Theorems like Sylow's. Proc. London math. Soc. (3) **6**, 286–304 (1956). — [3] HUPPERT, B.: Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen. Math. Z. **60**, 409–434 (1954). — [4] WIELANDT, H.: Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen. Math. Z. **45**, 209–244 (1939). — [5] WIELANDT, H.: Sylowgruppen und Kompositionsstruktur. Abh. math. Sem. Hamburg **22**, 215–228 (1958). — [6] ZASSENHAUS, H.: Gruppentheorie. Leipzig u. Berlin 1937; zweite Auflage (englisch) Göttingen 1958.

*Tübingen, Mathematisches Institut der Universität*

*(Eingegangen am 14. März 1960)*

Seite

Lange, L. J., and W. J. Thron, A two-parameter family of best twin convergence regions for contimued fractions. . . . . 295

Specht, W., Die Charaktere der symmetrischen Gruppe . . . . . 312

Rembs, E., Über die Verbiegbarkeit der Rinnen. II . . . . . 330

Merkes, E. P., and W. T. Scott, Covering theorems for $S$-fractions . . . . . 333

Walsh, J. L., On the Asymptotic Properties of Extremal Polynomials with Prescribed Constant Term . . . . . 339

Jurkat, W. B., On the analytic structure of semi-groups of positive matrices . . . 346

Picone, M., „Lunghezza" per un insieme di elementi di un arbitrario spazio metrico e sua semicontinuità inferiore . . . . . 366

Aumann, G., Beispiele zur Stabilität und Instabilität von Bewegungen . . . . . 374

Paasche, I., Zu einer Identität von Perron . . . . . 376

Steuerwald, R., Über die Gleichung $x^2 - Dy^2 = Cz$ . . . . . 382

Wielandt, H., Sylowtürme in subnormalen Untergruppen . . . . . 386

Unveränderter Nachdruck 1972
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
Druck: Strauß & Cramer GmbH, 6901 Leutershausen